الثانية بكالوريا علوم رياضية	حساب التكامل	الأستاذ : الحيان

التمرين 1 :
أحسب التكاملات التالية :

$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos(x)\sin^3(x)dx$ و $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)\cos^2(x)dx$ و $\int_0^4 x|x-2|dx$

و $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3(x)dx$ و $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(t)+\sin(2t)}{1+\sin(2t)}dt$ و $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(t)}{1+2\sin(t)}dt$

و $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2+2x+5}dx$ و $\int_1^{e}\frac{(\ln x)^4}{x}dx$ و $\int_0^2\frac{e^x}{1+e^x}dx$

التمرين 2 :
1. حل المعادلة التالية : $e^x+e^{-x}=2,5 \quad ; \quad x\in\mathbb{R}$.
2. أحسب النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+1}$
3. أ- أحسب التكامل : $I=\int_1^2\frac{2}{4+t^2}dt$

ب- استنتج قيمة التكامل : $J=\int_{\ln 2}^{\ln 5}\frac{e^x}{(3+e^x)\sqrt{e^x-1}}dx$

(يمكن وضع : $t=\sqrt{e^x-1}$)

التمرين 3 :
1. أ- أحسب : $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2}dx$.

ب- حدد على $\mathbb{R}$ دالة أصلية للدالة : $x\mapsto\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

جـ- باستعمال المكاملة بالأجزاء ؛ أحسب : $\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

2. أحسب : $\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{e^{2x}-2e^x+2}dx$ (يمكن وضع : $t=e^x-1$)

التمرين 4 :
1. بين أن : $\frac{1}{x^2(1+x^2)}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2} \quad : \quad \forall x\in\mathbb{R}^*$.
2. استنتج قيمة التكامل : $I=\int_1^2\frac{1}{x^2(1+x^2)}dx$.

التمرين 5 :
1. باستعمال المكاملة بالأجزاء؛ أحسب التكامل التالي :

$I=\int_0^1\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$.

2. استنتج التكامل التالي : $J=\int_0^1\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)dx$.

التمرين 6 :
1. أ- باستعمال المكاملة بتغيير المتغير ؛ أحسب التكامل التالي :

$I=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$ (يمكن وضع : $t=x+\sqrt{1+x^2}$)

ب- باستعمال المكاملة بالأجزاء؛ استنتج التكامل: $J=\int_0^1\sqrt{1+x^2}dx$

2. أحسب التكامل التالي : $K=\int_{-1}^{0}\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$.

التمرين 7 :
1. بين أن: $\frac{t}{2t^2+3t-2}=\frac{1}{5}\left(\frac{2}{t+2}+\frac{1}{2t-1}\right); \quad \forall x\in\mathbb{R}-\left\{-2,\frac{1}{2}\right\}$
2. أحسب التكامل التالي : $I=\int_1^4\frac{tdt}{2t^2+3t-2}$.
3. استنتج قيمة التكامل : $\int_0^5\frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$.

يمكن استعمال مكاملة بتغيير المتغير ($t=\sqrt{3x+1}$) .

التمرين 8 :
1. أ- بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}; \quad x^2+x+1=\frac{3}{4}\left[1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]$.

ب- بين باستعمال طريقة تغيير المتغير ؛ واضعا $t=\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ ؛ أن :

$$I:=\int_{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}^{1}\frac{1}{x^2+x+1}dx=\frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{\pi}{12}$$

2. أ- تحقق من أن :

$$\forall x\in\mathbb{R}^*; \frac{1}{x(x^2+x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{2x+1}{2(x^2+x+1)}-\frac{1}{2(x^2+x+1)}$$

ب- أحسب التكامل : $\int_{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}^{1}\frac{1}{x(x^2+x+1)}dx$.

3. أحسب ؛ باستعمال المكاملة بالأجزاء ؛ التكامل :

$$K=\int_{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}^{1}\frac{(2x+1)\ln(x)}{(x^2+x+1)^2}dx$$

التمرين 9 :
أحسب التكاملات التالية :

$I=\int_1^2\frac{x^4-3x^3+2}{x^2}dx$ و $J=\int_{-2}^{0}(x+1)\sqrt{x^2+2x+5}dx$ و

$K=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\pi-2}{4}}(x+1)\sin(2x+1)dx$ و $L=\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2+2x+5}dx$.

التمرين 10 :
1. أحسب التكامل التالي : $I=\int_1^2\frac{x}{x^2+1}dx$.
2. أوجد دالة أصلية للدالة : $x\mapsto\frac{x}{(x^2+1)^2}$.
3. باستعمال المكاملة بالأجزاء؛ أحسب : $\int_1^2\frac{x\ln(x)}{(x^2+1)^2}dx$.

(لاحظ أن : $\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}; \quad \forall x\in\mathbb{R}^*$)

التمرين 11 :

1. أحسب التكامل التالي : $I=\int_0^{\pi}\left(1+\sin(2x)\right)^2dx$.
2. أ- أحسب التكامل : $K=\int_0^1\frac{x^3}{1+x^2}dx$.
ب- باستعمال المكاملة بالأجزاء؛أحسب: $J=\int_0^1 x^2 Arc\tan(x)dx$

التمرين 12 :

1. أحسب : $\int_1^3\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$ (يمكن وضع : $t=\sqrt{x}$).
2. أ- بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}: \frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}}=e^{-x}-1+\frac{e^x}{1+e^x}$.
ب- أحسب : $\int_0^{\ln 2}\frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}}dx$.
جـ- باستعمال المكاملة بالأجزاء؛ أحسب : $\int_0^{\ln 2}e^{-x}\ln(1+e^{-x})dx$

التمرين 13 :

1. تحقق أن : $\forall t\in\mathbb{R}-\{-1,0\}: \frac{1}{t(t+1)^2}=\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}-\frac{1}{(t+1)^2}$
2. أحسب التكامل التالي : $\int_1^2\frac{1}{t(t+1)^2}dt$.
3. استنتج قيمة التكامل : $\int_0^{\ln 2}\frac{1}{(e^x+1)^2}dx$ (يمكن وضع $t=e^x$)

التمرين 14 :

1. تحقق أن : $\forall t\in\mathbb{R}-\{-1\}: \frac{t^2}{1+t}=t-1+\frac{1}{1+t}$.
2. أحسب التكامل التالي : $I=\int_0^1\frac{t^2}{1+t}dt$.
3. بين أن : $\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx=2I$ (يمكنك وضع : $t=\sqrt{x}$) .
4. باستعمال المكاملة بالأجزاء؛ أحسب : $\int_0^1\ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx$.

التمرين15 :

1. بين أن : $\int_2^3\frac{t}{t-1}dt=1+\ln 2$.
2. أحسب : $\int_5^{10}\frac{1+\sqrt{x-1}}{x-2}dx$ (يمكنك وضع : $t=\sqrt{x-1}$)

التمرين 16 :

1. أحسب التكامل : $I=\int_0^2|2x-1|dx$.
2. بوضعك $t=e^x$ ؛ أحسب التكامل: $J=\int_0^{\ln 2}\frac{e^x+3e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$.
(لاحظ أن : $\frac{t^2+3}{t(t^2+1)}=\frac{3}{t}-\frac{2t}{t^2+1}$)

التمرين 17 :

1. أحسب التكامل : $I=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{1}{x}|\ln x|dx$.
2. أ- أوجد العددين a و b بحيث يكون $\frac{2t}{1+t}=a+\frac{b}{1+t}$ لكل عدد حقيقي t يخالف -1 .
ب) أحسب التكامل : $J=\int_2^7\frac{1}{1+\sqrt{2+x}}dx$
(يمكن وضع $t=\sqrt{2+x}$)

التمرين 18 :

1. حدد دالة أصلية للدالة: $u:x\mapsto\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$.
2. باستعمال مكاملة بالأجزاء؛ أحسب : $\int_0^{\ln 2}\frac{(x+e^x)e^x}{(1+e^x)^2}dx$.

التمرين 19 :

1. أحسب التكامل : $I=\int_{-2}^0\frac{dx}{1+2e^x}dx$ (يمكنك وضع $t=e^{-x}$)
2. باستعمال مكاملة بالأجزاء؛أحسب: $J=\int_{-\ln 2}^0 e^{-x}\ln(1+2e^x)dx$

التمرين 20 :

1. بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}: \frac{1}{(e^x+1)^2}=1-\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$
2. أحسب : $\int_0^1\frac{dx}{(e^x+1)^2}$.
3. باستعمال مكاملة بالأجزاء؛ أحسب : $\int_0^1\frac{xe^x}{(e^x+1)^3}dx$.

التمرين 21 : ليكن $a>0$ ولتكن f دالة عددية متصلة على المجال $[-a,a]$.

1. بين أنه إذا كانت f دالة زوجية؛ فإن: $\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$
2. بين أنه إذا كانت f دالة فردية؛ فإن: $\int_{-a}^a f(x)dx=0$.
3. استنتج حساب التكاملين التاليين :
$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin(x)|dx$ و $J=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\cos(x)\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)dx$

التمرين 22 :

لتكن f دالة متصلة على $\mathbb{R}$ ودورية دورها T .
1. بين أن : $\forall\alpha\in\mathbb{R}: \int_\alpha^{\alpha+T}f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$.
2. أحسب التكامل : $I=\int_{\frac{2005\pi}{3}}^{\frac{2008\pi}{3}}|\sin(x)|dx$.

التمرين 23 :

أحسب نهاية المتتالية $(u_n)_n$ في كل من الحالات التالية :

أ- $u_n=\sum_{p=1}^{2n-1}\frac{1}{2n+p}$ ؛ ب- $u_n=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-p^2}}$

جـ- $u_n=\sum_{p=0}^{n}\frac{p}{n^2}\sin\left(p\pi\right)$.