

## التكامل

### I- تكامل دالة متصلة على مجال

#### 1- تعريف و ترميز

لتكن  $f$  دالة متصلة على مجال  $I$  و  $a$  و  $b$  عنصرين من  $I$ .  
إذا كانت  $F$  و  $G$  دالتين أصليتين للدالة  $f$  على  $I$  فإن  $F(b)-F(a)=G(b)-G(a)$ .  
أي أن العدد الحقيقي  $F(b)-F(a)$  غير مرتبط باختيار الدالة الأصلية  $F$ .

#### تعريف

لتكن  $f$  دالة متصلة على مجال  $I$  و  $a$  و  $b$  عنصرين من  $I$ .  
العدد الحقيقي  $F(b)-F(a)$  حيث  $F$  دالة أصلية للدالة  $f$  على  $I$ , يسمى تكامل الدالة  $f$  من  $a$  إلى  $b$  ويكتب  $\int_a^b f(x) dx$  ويقرأ مجموع  $f(x) dx$  من  $a$  إلى  $b$  أو تكامل من  $a$  إلى  $b$  لـ  $f(x) dx$ .

$a$  و  $b$  يسميا محدا التكامل  $\int_a^b f(x) dx$

في الكتابة  $\int_a^b f(x) dx$  يمكن تعويض  $x$  بأي حرف آخر ، بمعنى أن

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \dots\dots$$

من أجل تبسيط الكتابة  $F(b)-F(a)$  نكتبها على الشكل  $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$

#### أمثلة

$$* \text{ نحسب } \int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

الدالة  $x \rightarrow \frac{1}{x}$  متصلة على  $[1;2]$  و دالة أصلية لها هي  $x \rightarrow \ln x$

$$\text{اذن } \int_1^2 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^2 = \ln 2$$

$$* \text{ أحسب } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx \quad ; \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx \quad ; \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos x dx$$

### 2- خاصيات

#### أ- خاصيات

لتكن  $f$  دالة متصلة على مجال  $I$  و  $a$  و  $b$  و  $c$  عناصر من  $I$

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx \quad * \quad \int_a^a f(x) dx = 0 \quad *$$

$$* \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (\text{علاقة شال})$$

#### أمثلة

$$\text{أحسب } I = \int_{-1}^1 |x| dx$$

$$\int_{-1}^1 |x| dx = \int_{-1}^0 |x| dx + \int_0^1 |x| dx = \int_{-1}^0 -x dx + \int_0^1 x dx = \left[ -\frac{1}{2} x^2 \right]_{-1}^0 + \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = 1$$

(ب-) لتكن  $f$  دالة متصلة على مجال  $I$  و  $a$  عنصرا من  $I$

$$\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \int_a^x f(t) dt$$

لدينا  $\forall x \in I \quad \varphi(x) = F(x) - F(a)$  حيث  $F$  دالة أصلية لـ  $f$  على  $I$ .

اذن  $\varphi$  قابلة للاشتقاق على  $I$  و  $\varphi' = f$  أي أن  $\varphi(a) = 0$  دالة الأصلية للدالة  $f$  على  $I$  التي تنعدم

في  $a$

خاصية

لتكن  $f$  دالة متصلة على مجال  $I$  و  $a$  عنصرا من  $I$ .

الدالة المعرفة على  $I$  بما يلي  $x \rightarrow \int_a^x f(t) dt$  هي الدالة الأصلية لـ  $f$  على  $I$  التي تنعدم في  $a$

مثال

نعلم أن الدالة  $x \rightarrow \ln x$  هي الدالة الأصلية لـ  $x \rightarrow \frac{1}{x}$  على  $]0; +\infty[$  التي تنعدم في 1.

$$\forall x \in ]0; +\infty[ \quad \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

تمارين

حدد الدالة الأصلية لـ  $f$  على  $]0; +\infty[$  التي تنعدم في 2 حيث  $\forall x \in ]0; +\infty[ \quad f(x) = \frac{1}{x} \ln x$

ج.- خاصية

لتكن  $f$  و  $g$  دالتين متصلتين على  $[a; b]$  و  $\lambda$  عدد حقيقي ثابت

$$\int_a^b (\lambda f(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx \quad \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

تمارين

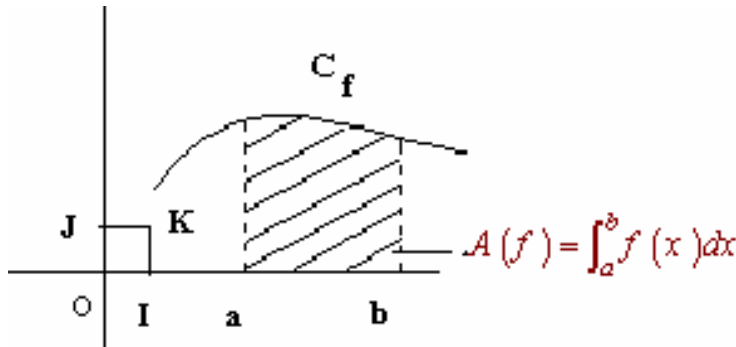
حدد  $\int_0^1 (x^2 - 3x + 1) dx$  ;  $\int_0^\pi \cos^4 x dx$  ( يمكن اخطاها  $\cos^4 x$  )

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

تمارين

أحسب  $I + J$  و  $I - J$  واستنتج  $I$  ;  $J$

د التآويل الهندسي للعدد  $\int_a^b f(x) dx$



خاصية

إذا كانت  $f$  دالة متصلة و موجبة على  $[a; b]$  (  $a < b$  ) فان مساحة الحيز المحصور بين منحنى الدالة  $f$  و محور الأفاصل و المستقيمين المعرفتين على التوالي بالمعادلتين  $x = a$  و  $x = b$  هي

$$A(f) = \int_a^b f(x) dx \quad \text{بوحددة قياس المساحات}$$

ملاحظة

إذا كان المستوى منسوب إلى معلم متعامدين فان وحدة قياس المساحة هي مساحة المربع

OJK

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \text{ نعتبر}$$

$$\left(\|\vec{i}\| = 1cm \quad \|\vec{j}\| = 2cm\right) \quad C_f \text{ أنشئ}$$

أحسب بـ  $cm^2$  مساحة الحيز المحصور بين  $C_f$  و محور الأفاصيل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين  $x=1$  ;  $x=3$ .

## II- تقنيات حساب التكاملات

### 1- الاستعمال المباشر لدوال الأصلية

#### أمثلة

\* أحسب  $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx$  نلاحظ أن  $\frac{(\ln x)^2}{x}$  على شكل  $u'u^2$  حيث  $u(x) = \ln x$

و نعلم أن الدالة الأصلية لـ  $u'u^2$  هي  $\frac{1}{3}u^3$  إذن  $\frac{1}{3}$   $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \left[ \frac{1}{3} u^3(x) \right]_1^e = \left[ \frac{1}{3} \ln^3 x \right]_1^e = \frac{1}{3}$

\* أحسب  $\int_0^1 \frac{2}{e^x + 1} dx$  لدينا  $\frac{2}{e^x + 1} = 2 \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$  بهذا التحويل نلاحظ أن  $\frac{2}{1 + e^x}$  يكتب على شكل

$-2 \frac{u'}{u}$  حيث  $u(x) = 1 + e^{-x}$  إذن  $\int_0^1 \frac{2}{e^x + 1} dx = \left[ -2 \ln |u(x)| \right]_0^1 = \left[ -\ln(1 + e^{-x}) \right]_0^1$

تمارين -1 حدد  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x dx$

2- أ- أوجد a و b و c حيث  $\forall x \neq 0 \quad \frac{2x^4 + x^2 + x - 1}{x^3 + x} = ax + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2 + 1}$

ب- استنتج قيمة  $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x^4 + x^2 + x - 1}{x^3 + x} dx$

3- بين أن التعبير  $\frac{1}{x^2 - 2x + 5}$  يكتب على شكل  $\frac{1}{2} \frac{u'}{u^2 + 1}$  حيث  $u$  دالة يجب تحديدها.

استنتج قيمة  $\int_1^{1+2\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 - 2x + 5} dx$

4- أحسب  $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx$  ;  $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$   $\left( \frac{1}{x \ln x} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} \right)$

### 2- المكاملة بالأجزاء

لتكن  $f$  و  $g$  دالتين قابلتين للاشتقاق على  $[a; b]$  بحيث  $f'$  و  $g'$  متصلتين على  $[a; b]$  نعلم أن

$$\forall x \in [a; b] \quad (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\forall x \in [a; b] \quad f'(x)g(x) = (fg)'(x) - f(x)g'(x)$$

#### خاصية

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [(fg)(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

مثال أحسب  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$  نضع  $u'(x) = \cos x$  ;  $v(x) = x$

ومنه  $u(x) = \sin x$  ;  $v'(x) = 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = \left[ x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \left[ x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[ -\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1 \quad \text{إذن}$$

أحسب  $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$  ;  $J = \int_0^{\pi} x^2 \sin x dx$  ;  $I = \int_1^e \ln x dx$  تمرين

الحل

$$K = \left[ e^x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = \left[ e^x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[ e^x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - K$$

$$K = \frac{1}{2} \left( \left[ e^x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[ e^x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \dots\dots\dots$$

1- أحسب  $\int_0^1 \ln \left| \frac{x+2}{x+1} \right| dx$   $\int_0^1 x \sqrt{x+3} dx$   $\int_0^3 (x-1)e^{2x} dx$   $\int_1^2 x^2 \ln x dx$  تمرين

2- باستعمال المكاملة بالأجزاء أوجد الدوال الأصلية لـ  $f$  على  $\left[ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$  حيث  $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$

3- أحسب  $I = \int_0^x e^t \cos^2 t dt$  ( يمكن اعتبار  $J = \int_0^x e^t \sin^2 t dt$  )

### 3- المكاملة بتغيير المتغير

لتكن  $g$  دالة قابلة للاشتقاق على  $[a; b]$  حيث  $g'$  متصلة على  $[a; b]$ . و  $f$  دالة متصلة على  $J$  حيث  $g([a; b]) = J$

إذا كانت  $F$  دالة أصلية لـ  $f$  على  $J$  فإن  $(F \circ g)'(x) = f(g(x)) \times g'(x) \quad \forall x \in [a; b]$

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \left[ F \circ g(x) \right]_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt$$

### خاصية

لتكن  $g$  دالة قابلة للاشتقاق على  $[a; b]$  حيث  $g'$  متصلة على  $[a; b]$ . و  $f$  دالة متصلة على  $J$  حيث  $g([a; b]) = J$

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt$$

### ملاحظة

إذا وضعنا  $t = g(x)$  فإن  $\frac{dt}{dx} = g'(x)$  أي  $dt = g'(x) dx$

إذا عوضنا في التعبير  $f(g(x)) g'(x) dx$  المتغير  $x$  بالمتغير  $t$  نحصل على  $f(t) dt$

ولدينا إذا كان  $\left. \begin{matrix} x = a \\ x = b \end{matrix} \right\}$  فإن  $\left. \begin{matrix} t = g(a) \\ t = g(b) \end{matrix} \right\}$

نقول إننا أجرينا تغييرا للمتغير بوضع  $t = g(x)$

أمثلة أحسب  $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{4}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} dx$   $\left( t = \frac{1}{x} \right)$   $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \cos x}$   $\left( t = \tan \frac{x}{2} \right)$  أمثلة

ملاحظة  $\left( \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} ; \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \right)$

$$\begin{aligned} (e^x = t) \quad \int_1^{\ln 2} \sqrt{e^x + 1} \quad ; \quad (t = 2 + \sqrt{x}) \quad \int_0^1 \frac{dx}{2 + \sqrt{x}} \\ (t = \tan x) \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx \quad , \quad (t = e^x) \quad \int_1^2 \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx \\ \left( t = \frac{e^u - e^{-u}}{2} \quad ; \quad x = \frac{1}{t} \right) \quad \int_1^2 \frac{1}{x \sqrt{1 + x^2}} dx \end{aligned}$$

### III- التكامل و الترتيب

#### 1- مقارنة تكاملين

(a) لتكن  $f$  دالة متصلة على  $[a; b]$  و  $F$  دالة أصلية لـ  $f$  على  $[a; b]$   
 $\forall x \in [a; b] \quad F'(x) = f(x) \quad \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$   
 إذا كانت  $f$  موجبة على  $[a; b]$  فإن  $F$  تزايدية على  $[a; b]$   
 وحيث أن  $a \leq b$  فإن  $F(a) \leq F(b)$  اذن  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

#### خاصية

لتكن  $f$  دالة متصلة على  $[a; b]$  ( $a \leq b$ )

إذا كانت  $f$  موجبة على  $[a; b]$  فإن  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

#### (b) خاصية

لتكن  $f$  و  $g$  دالتين متصلتين على  $[a; b]$  ( $a \leq b$ )

إذا كانت  $f \leq g$  على  $[a; b]$  فإن  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

#### مثال

$$\begin{aligned} \text{نؤطر} \quad I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx \\ \text{لدينا} \quad 1 \leq 1+x \leq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^2}{1+x} \leq x^2 \\ \int_0^1 \frac{x^2}{2} dx \leq I \leq \int_0^1 x^2 dx \quad \text{ومنه} \quad \forall x \in [0; 1] \\ \frac{1}{6} \leq I \leq \frac{1}{3} \quad \text{اذن} \end{aligned}$$

#### (c) خاصيات

أ- لتكن  $f$  دالة متصلة على  $[a; b]$  ( $a \leq b$ )

إذا كانت  $f$  سالبة على  $[a; b]$  فإن  $\int_a^b f(x) dx \leq 0$

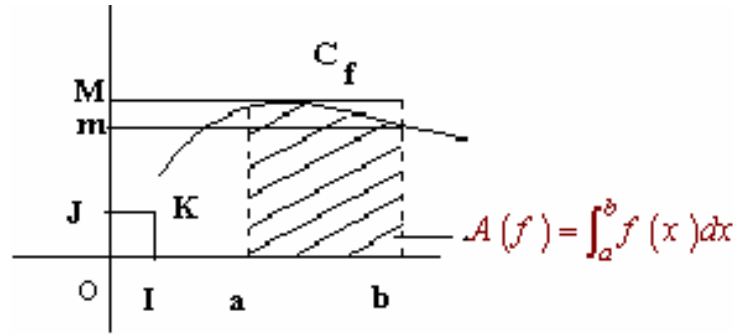
ب-  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

ج- لتكن  $M$  القيمة القصوى و  $m$  القيمة الدنيا للدالة  $f$  على  $[a; b]$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

#### ملاحظة

إذا كانت  $f$  موجبة على  $[a; b]$  فان المساحة  $A(f) = \int_a^b f(x) dx$  في معلم م.م محصورة بين مساحتي المستطيل الذي بعديه  $M$  و  $(b-a)$  والمستطيل الذي بعديه  $m$  و  $(b-a)$ .



**مثال**

نعتبر  $I = \int_1^3 \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx$  نبين أن  $0 \leq I \leq \sqrt{2}$

الدالة  $x \rightarrow \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$  موجبة و تناقصية على  $]0; +\infty[$  ومنه  $\sup_{x \in [1;3]} f(x) = f(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

اذن  $0 \leq I \leq (3-1) \frac{\sqrt{2}}{2}$

## 2- القيمة المتوسطة لدالة متصلة في قطعة

لتكن  $f$  دالة متصلة على  $[a; b]$  ( $a < b$ ) و  $M$  القيمة القصوى و  $m$  القيمة الدنيا للدالة  $f$  على  $[a; b]$

اذن  $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$  ومنه حسب مبرهنة القيمة الوسطية يوجد على الأقل  $c$  في  $[a; b]$

حيث  $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

## خاصية و تعريف

لتكن  $f$  دالة متصلة على  $[a; b]$  ( $a \neq b$ )

العدد الحقيقي  $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$  يسمى القيمة المتوسطة للدالة  $f$  على  $[a; b]$ .

يوجد على الأقل  $c$  في  $[a; b]$  حيث  $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

## ملاحظة

إذا كانت  $f$  موجبة على  $[a; b]$  فان المساحة  $A(f) = \int_a^b f(x) dx$  في معلم م.م هي مساحة

المستطيل

الذي بعده  $(b-a)$  و  $f(c)$ .

**تمرين 1-** أحسب القيمة المتوسطة للدالة  $f$  على  $I$  في الحالتين التاليتين

$I = [0; 1]$   $f(x) = \frac{x^3 + 5x^2 + x + 3}{x+1}$  ( $b$  ;  $I = [-1; 0]$   $f(x) = (x-1)e^x$  ( $a$

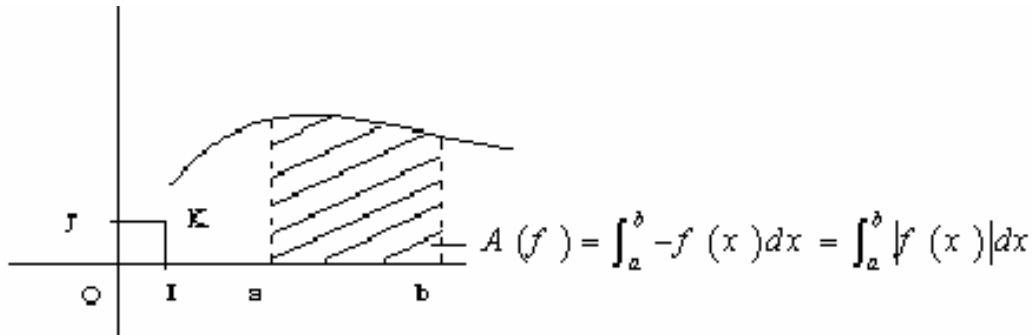
2- أطر الدالة  $f$  على  $[0; 1]$  حيث  $f(x) = \arctan x$

الجواب عن السؤال 2 لدينا  $f$  قابلة للاشتقاق على  $[0; 1]$  و  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$   $\forall x \in [0; 1]$  ومنه

$\frac{x}{2} \leq f(x) \leq x \quad \forall x \in [0; 1]$  اذن  $\int_0^x \frac{1}{2} dt \leq \int_0^x f'(t) dt \leq \int_0^x 1 dt$   $\forall x \in [0; 1]$   $\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 1$

1- حساب المساحات الهندسية

المستوى منسوب إلى م.م.م  $(o; \vec{i}; \vec{j})$   
 لتكن  $f$  دالة متصلة على  $[a; b]$  و  $C_f$  منحناها و  $\Delta(f)$  الحيز المحصور بين  $C_f$  و محور الأفاصيل  
 والمستقيمين  $(\Delta_1): x = a$   $(\Delta_2): x = b$



\* إذا كانت  $f$  موجبة على  $[a; b]$  فإن مساحة  $\Delta(f)$  هي  $\int_a^b f(x)dx$  بوحدة قياس المساحات

\* إذا كان كانت  $f$  سالبة على  $[a; b]$  مساحة هي مساحة  $\Delta(-f)$

$$A(f) = \int_a^b -f(x)dx = \int_a^b |f(x)|dx$$

\* إذا كانت  $f$  تغير إشارتها على  $[a; b]$  مثلا يوجد  $c$  من  $[a; b]$  حيث  $f$  موجبة على  $[a; c]$  و سالبة على  $[c; b]$

الحيز  $\Delta(f)$  على  $[a; b]$  هو اتحاد  $\Delta(f)$  على  $[a; c]$  و  $\Delta(f)$  على  $[c; b]$

$$A(f) = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b -f(x)dx = \int_a^c |f(x)|dx + \int_c^b |f(x)|dx = \int_a^b |f(x)|dx$$

خاصية

المستوى منسوب الى م.م.م  $(o; \vec{i}; \vec{j})$   
 لتكن  $f$  دالة متصلة على  $[a; b]$  و  $C_f$  منحناها و  $\Delta(f)$  الحيز المحصور بين  $C_f$  و محور الأفاصيل  
 والمستقيمين  $(\Delta_1): x = a$   $(\Delta_2): x = b$   
 مساحة الحيز  $\Delta(f)$  هو  $\int_a^b |f(x)|dx$  بوحدة قياس المساحة

اصطلاحات

العدد الموجب  $\int_a^b |f(x)|dx$  يسمى المساحة الهندسية للحيز  $\Delta(f)$ .

العدد الحقيقي  $\int_a^b f(x)dx$  يسمى المساحة الجبرية للحيز  $\Delta(f)$ .

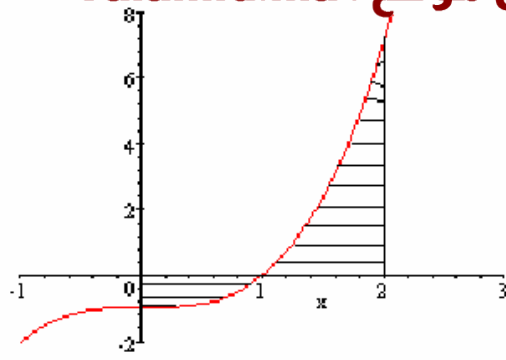
مثال

نعتبر  $f(x) = x^3 - 1$

حدد مساحة الحيز المحصور بين المنحنى  $C_f$  و محور الأفاصيل و المستقيمين ذا المعادلتين

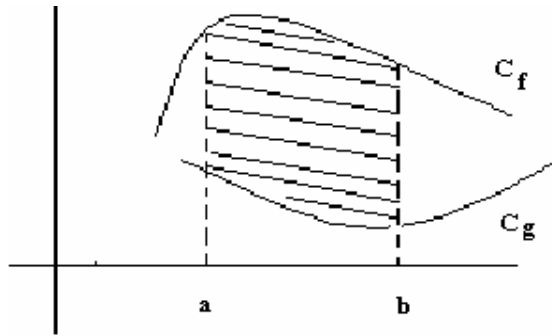
$x = 2$  ;  $x = 0$

$$A = \int_0^2 |f(x)|dx = \int_0^1 (1 - x^3)dx + \int_1^2 (x^3 - 1)dx = \frac{7}{2}u \quad (u = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|)$$



## -2 مساحة حيز محصور بين منحنين

لتكن  $f$  و  $g$  دالتين متصلتين على  $[a; b]$  و  $\Delta$  هو الحيز المحصور بين  $C_f$  و  $C_g$  والمستقيمين  $(\Delta_1): x = a$  و  $(\Delta_2): x = b$  في م.م.م  $(o; \vec{i}; \vec{j})$



إذا كان  $f \geq g \geq 0$  فإن  $A(\Delta) = A(f) - A(g)$

$$A(\Delta) = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

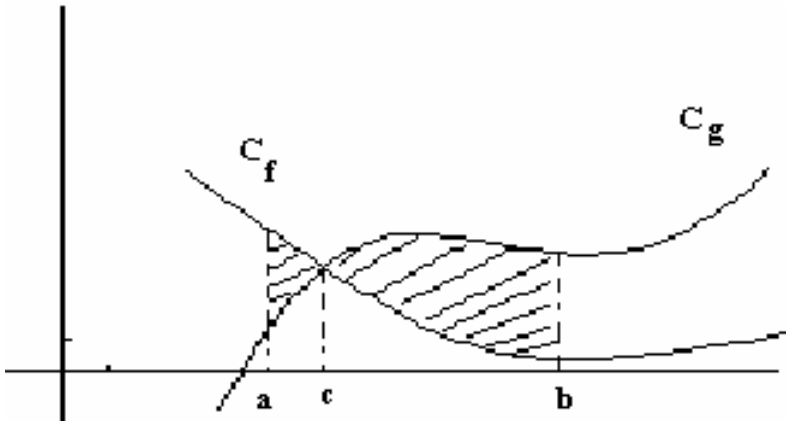
إذا كانت  $f \leq g$  وكانت إشارتي  $f$  و  $g$  و يتابع نفس الطريقة نحصل على أن

$$A(\Delta) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

## خاصية

لتكن  $f$  و  $g$  دالتين متصلتين على  $[a; b]$   
مساحة الحيز  $\Delta$  المحصور بين  $C_f$  و  $C_g$  والمستقيمين  $(\Delta_1): x = a$  و  $(\Delta_2): x = b$  هي  $A(\Delta) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$  وحدة قياس المساحات

## ملاحظة



$$A(\Delta) = \int_a^c (f(x) - g(x)) dx + \int_c^b (g(x) - f(x)) dx$$

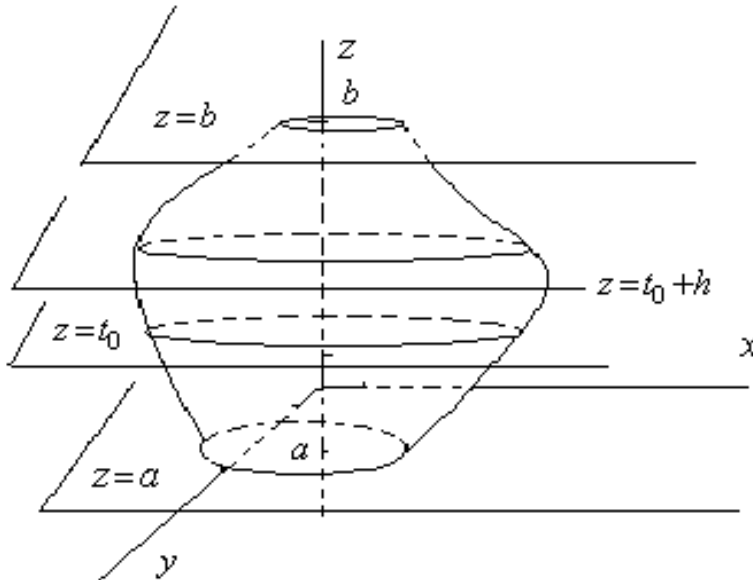


الفضاء منسوب إلى معلم م.م  $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  نفترض أن وحدة قياس الحجم هي حجم المكعب الذي طول حرفه

$\|\vec{i}\|$

### 1- حجم مجسم في الفضاء

ليكن  $S$  مجسما محصورا بين المستويين المعرفين بالمعادلتين  $z = a$  و  $z = b$  نرسم  $S(t)$  إلى مساحة مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  من  $S$  حيث  $z = t$  و بالرمز  $V(t)$  إلى حجم مجموعة النقط من  $S$  المحصور بين المستويين  $z = a$  و  $z = t$  ;  
ليكن  $t_0$  من  $[a; b]$  و  $h$  عددا موجبا حيث  $t_0 + h \in [a; b]$



حجم مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  من  $S$  المحصورة بين  $z = t_0$  و  $z = t_0 + h$  هو  $V(t_0 + h) - V(t_0)$  ومن جهة ثانية هذا الحجم محصور بين حجمي الأسطوانتين التي ارتفاعهما  $h$  ومساحتا قاعدتيهما على التوالي  $S(t_0)$  و  $S(t_0 + h)$

إذا افترضنا أن  $S(t_0) \leq S(t_0 + h)$  فإن  $h \cdot S(t_0) \leq V(t_0 + h) - V(t_0) \leq h \cdot S(t_0 + h)$

$$S(t_0) \leq \frac{V(t_0 + h) - V(t_0)}{h} \leq S(t_0 + h) \text{ و منه}$$

و إذا افترضنا أن التطبيق  $t \rightarrow S(t)$  متصل على  $[a; b]$  فإن  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(t_0 + h) - V(t_0)}{h} = S(t_0)$

إذن الدالة  $t \rightarrow V(t)$  قابلة للاشتقاق على  $[a; b]$  و  $V'(t) = S(t) \quad \forall t \in [a; b]$

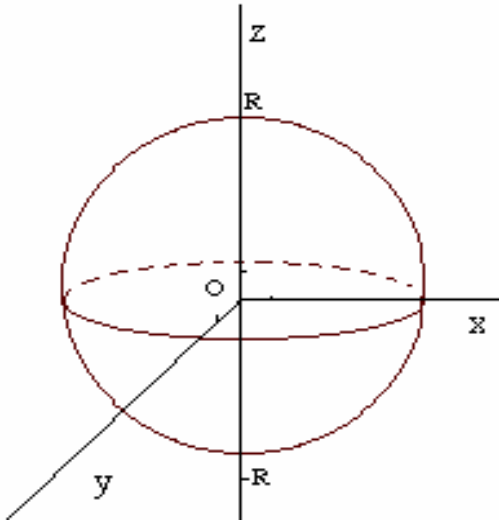
أي أن الدالة  $t \rightarrow V(t)$  دالة أصلية للدالة  $t \rightarrow S(t)$  على  $[a; b]$

و بما أن  $V(a) = 0$  فإن  $V(t) = \int_a^t S(x) dx \quad \forall t \in [a; b]$

إذن حجم المجسم  $S$  هو  $V = V(b) = \int_a^b S(x) dx$  وحدة قياس الحجم .

### خاصية

الفضاء منسوب إلى معلم م.م  
ليكن  $S$  مجسما محصورا بين المستويين المعرفين بالمعادلتين  $z = a$  و  $z = b$  نرسم  $S(t)$  الى مساحة مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  من  $S$  حيث  $z = t$   
إذا كان أن التطبيق  $t \rightarrow S(t)$  متصلا على  $[a; b]$  فإن حجم المجسم  $S$  هو  $V = \int_a^b S(z) dz$  وحدة قياس الحجم.



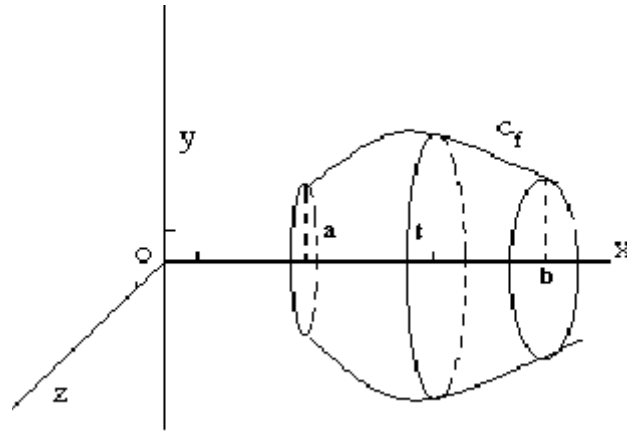
تمرين

أحسب حجم الفلكة التي مركزها  $O$  و شعاعها  $R$   
 الحل : نفترض أن الفضاء منسوب م.م.م أصله  $O$ .  
 الفلكة محصورة بين المستويين المعرفين على التوالي  
 بالمعادلتين  $z = -R$  ;  $z = R$

مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  من الفلكة حيث  $-R \leq t \leq R$   $z = t$   
 هي قرص شعاعه  $\sqrt{R^2 - t^2}$  ومساحته  $S(t) = \pi(R^2 - t^2)$   
 بما أن التطبيق  $t \rightarrow \pi(R^2 - t^2)$  متصلة على  $[-R; R]$  فإن  $\frac{4}{3}\pi R^3$

## 2- حجم مجسم الدوران

لتكن  $f$  دالة متصلة على  $[a; b]$  و  $C_f$  منحناها في م.م.م  $(O; \vec{i}; \vec{j})$   
 إذا دار  $C_f$  حول المحور  $(O; \vec{i})$  دورة كاملة فانه يولد مجسما يسمى مجسم الدوران



في هذه الحالة لدينا مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  من الجسم بحيث  $x = t$  هي قرص مساحته  
 $S(t) = \pi f^2(t)$   
 التطبيق  $t \rightarrow \pi f^2(t)$  متصلة على  $[a; b]$   
 إذن حجم المجسم الدوراني هو  $V = \int_a^b \pi f^2(t) dt$

خاصية

الفضاء منسوب إلى م.م.م أصله  $O$  , و  $f$  دالة متصلة على  $[a; b]$   
 حجم مجسم الدوران المولد عن دوران المنحنى  $C_f$  حول المحور  $(OX)$  هو  $V = \int_a^b \pi f^2(t) dt$   
 بوحدة قياس الحجم .

تمرين

$$f(x) = \frac{1}{2}x \ln x$$

أنشئ  $C_f$  و حدد حجم مجسم الدوران الذي يولده دوران المنحنى  $C_f$  حول المحور  $(OX)$  في المجال  $[1; e]$   
IV- حساب بعض النهايات باستعمال التكامل

لتكن  $f$  متصلة على  $[a; b]$ .

$$s_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) ; \quad S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) \quad \text{لكل عنصر } n \text{ من } \mathbb{N}^* \text{ نضع}$$

إذا كانت  $f$  رتيبة قطعاً على  $[a; b]$  أو قابلة للاشتقاق و  $f'$  محدودة على  $[a; b]$  فإن المتتاليتين  $(S_n)$  و  $(s_n)$

متقاربتين و تقبلان التكامل  $\int_a^b f(x) dx$  نهاية مشتركة لهما عندما يؤول  $n$  إلى  $+\infty$

مثال

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \quad \text{نعتبر}$$

حدد  $\lim u_n$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \sum_{k=1}^n f\left(1+\frac{k}{n}\right) \quad \text{لدينا}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{حيث}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln 2 \quad \text{لدينا } f \text{ متصلة وتناقصية على } [1; 2] \text{ ومنه المتتالية } (u_n)_{n \geq 1} \text{ متقاربة و}$$

حالة خاصة

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad \text{المتوسط الحسابي} \quad \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \quad \text{يؤول الى القيمة المتوسطة}$$

تمارين

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^2 + k^2} ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{n} ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}} ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}$$

أحسب النهايات