

## التكامل

### I- تكامل دالة متصلة على مجال

#### 1- تعريف و ترميز

لتكن  $f$  دالة متصلة على مجال  $I$  و  $a$  و  $b$  عنصرين من  $I$ .  
إذا كانت  $F$  و  $G$  الدالتين أصليتين للدالة  $f$  على  $I$  فان  $F(b)-F(a)=G(b)-G(a)$   
أي أن العدد الحقيقي  $F(b)-F(a)$  غير مرتبط باختيار الدالة الأصلية  $F$ .

#### تعريف

لتكن  $f$  دالة متصلة على مجال  $I$  و  $a$  و  $b$  عنصرين من  $I$ .  
العدد الحقيقي  $F(b)-F(a)$  حيث  $F$  دالة أصلية للدالة  $f$  على  $I$ , يسمى تكامل الدالة  $f$  من  $a$  إلى  $b$ . ويكتب  $\int_a^b f(x)dx$

$a$  و  $b$  يسميا محددا التكامل

في الكتابة  $\int_a^b f(x)dx$  يمكن تعويض  $x$  بأي حرف آخر ، معنى أن

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \dots \dots$$

من أجل تبسيط الكتابة  $F(b)-F(a)$  نكتبها على الشكل

#### أمثلة

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx \quad * \quad \text{حسب}$$

الدالة  $x \rightarrow \ln x$  متصلة على  $[1; 2]$  و دالة أصلية لها هي

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^2 = \ln 2 \quad \text{اذن}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx \quad ; \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx \quad ; \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos x dx \quad * \quad \text{أحسب}$$

#### 2- خصائص

#### أ- خصائص

لتكن  $f$  دالة متصلة على مجال  $I$  و  $a$  و  $b$  و  $c$  عناصر من  $I$

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx \quad * \quad \int_a^a f(x)dx = 0 \quad *$$

$$(علاقة شال) \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad *$$

#### أمثلة

$$I = \int_{-1}^1 |x| dx \quad \text{أحسب}$$

$$\int_{-1}^1 |x| dx = \int_{-1}^1 |x| dx = \int_{-1}^0 -x dx + \int_0^1 x dx = \left[ \frac{-1}{2} x^2 \right]_{-1}^0 + \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = 1$$

ب-) لتكن  $f$  دالة متصلة على مجال  $I$  و  $a$  عنصر من  $I$

# هذا الملف تم تحميله من موقع Talamid.ma

$$\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \int_a^x f(t) dt$$

لدينا  $\forall x \in I \quad \varphi(x) = F(x) - F(a)$  حيث  $F$  دالة أصلية لـ  $f$  على  $I$   
اذن  $\varphi$  قابلة للاشتقاق على  $I$  و  $\varphi'(a) = f(a)$  أي أن  $\varphi$  دالة الأصلية للدالة  $f$  على  $I$  التي تنعدم

في  $a$   
خاصية

لتكن  $f$  دالة متصلة على مجال  $I$  و  $a$  عنصراً من  $I$ .

الدالة المعرفة على  $I$  بما يلي  $x \rightarrow \int_a^x f(t) dt$  هي الدالة الأصلية لـ  $f$  على  $I$  التي تنعدم في  $a$

مثال نعلم أن الدالة  $x \rightarrow \ln x$  هي الدالة الأصلية لـ  $x \rightarrow \frac{1}{x}$  على  $[0; +\infty]$  التي تنعدم في 1.

$$\forall x \in [0; +\infty[ \quad \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

تمرين حدد الدالة الأصلية لـ  $f$  على  $[0; +\infty]$  التي تنعدم في 2 حيث  $f(x) = \frac{1}{x} \ln x$

ح.)- خاصية

لتكن  $f$  و  $g$  دالتين متصلتين على  $[a; b]$  و  $\lambda$  عدد حقيقي ثابت

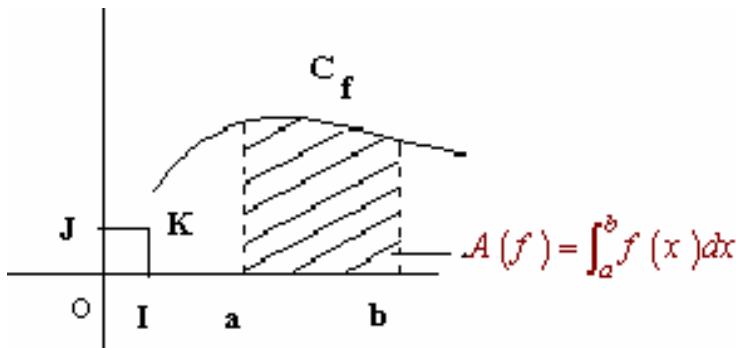
$$\int_a^b (\lambda f(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx \quad \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

تمرين حدد  $\int_0^\pi \cos^4 x dx$  (يمكن اخطاط  $\int_0^\pi \cos^4 x dx$  ;  $\int_0^1 (x^2 - 3x + 1) dx$ )

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

تمرين تعتبر  $J$  و  $I$  و  $I - J$  و  $I + J$  وأحسب  $I$  واستنتج  $I$  ;

د. التأويل الهندسي للعدد  $\int_a^b f(x) dx$



خاصية

إذا كانت  $f$  دالة متصلة و موجبة على  $[a; b]$  فإن مساحة الحيز المحصور بين منحنى الدالة  $f$  و محور الأفاسيل و المستقيمين المعرفتين على التوالي بالمعادلتين  $x = a$  و  $x = b$  هي

$$A(f) = \int_a^b f(x) dx$$

إذا كان المستوى منسوب إلى معلم متعمدين فإن وحدة قياس المساحة هي مساحة المربع ملاحظة OIJK

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{نعتبر}$$

$$\left( \|\vec{i}\| = 1\text{cm} \quad \|\vec{j}\| = 2\text{cm} \right) \quad C_f \quad \text{أنشئ}$$

أحسب بـ  $\text{cm}^2$  مساحة الحيز المحصور بين  $C_f$  و محور الأفاسيل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين .  $x = 3$  ;  $x = 1$

## II- تقنيات حساب التكاملات

### -1 الاستعمال المباشر لدوال الأصلية

أمثلة

$$u(x) = \ln x \quad u'u^2 \quad \text{على شكل } \frac{(\ln x)^2}{x} \quad \text{نلاحظ أن} \quad \int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx \quad * \quad \text{أحسب}$$

$$\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \left[ \frac{1}{3} u^3(x) \right]_1^e = \left[ \frac{1}{3} \ln^3 x \right]_1^e = \frac{1}{3} \quad \text{إذن } \frac{1}{3} u^3 \text{ هي}$$

$$\text{و نعلم أن الدالة الأصلية لـ } u^2 \text{ هي } \frac{2}{1+e^x} \quad \text{يكتب على شكل} \quad \frac{2}{1+e^x} = 2 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \quad \text{لدينا} \quad \int_0^1 \frac{2}{e^x + 1} dx \quad * \quad \text{أحسب}$$

$$\int_0^1 \frac{2}{e^x + 1} dx = \left[ -2 \ln|u(x)| \right]_0^1 = \left[ -\ln(1+e^{-x}) \right]_0^1 \quad \text{إذن } u(x) = 1+e^{-x} \quad \text{حيث} \quad -2 \frac{u'}{u}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x dx \quad \text{حدد} \quad -1 \quad \text{تمرين}$$

$$\forall x \neq 0 \quad \frac{2x^4 + x^2 + x - 1}{x^3 + x} = ax + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2 + 1} \quad \text{-1- أوجد } a \text{ و } b \text{ و } c \text{ حيث}$$

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x^4 + x^2 + x - 1}{x^3 + x} dx \quad \text{ب- استنتاج قيمة}$$

$$\text{-3- بين أن التعبير } \frac{1}{2u^2 + 1} \text{ يكتب على شكل } \frac{1}{x^2 - 2x + 5} \text{ حيث } u \text{ دالة يجب تحديدها .}$$

$$\int_1^{1+2\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 - 2x + 5} dx \quad \text{استنتاج قيمة}$$

$$\left( \frac{1}{x \ln x} = \frac{1}{\ln x} \right) \quad \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx \quad ; \quad \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx \quad \text{-4- أحسب}$$

### -2 المتكاملة بالأجزاء

لتكن  $f$  و  $g$  دالتين قابلتين للاشتقاق على  $[a;b]$  بحيث  $f'$  و  $g'$  متصلتين على  $[a;b]$   
نعلم أن

$$\forall x \in [a;b] \quad (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\forall x \in [a;b] \quad f'(x)g(x) = (fg)'(x) - f(x)g'(x)$$

خاصية

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [(fg)(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

$$v(x) = x \quad ; \quad u'(x) = \cos x \quad \text{نضع} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx \quad \text{أحسب} \quad \text{مثال}$$

# هذا الملف تم تحميله من موقع Talamid.ma

ومنه  $v'(x) = 1$  ;  $u(x) = \sin x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1 \quad \text{إذن}$$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx \quad ; \quad J = \int_0^{\pi} x^2 \sin x dx \quad ; \quad I = \int_1^e \ln x dx \quad \text{أحسب} \quad \text{تمرين} \quad \underline{\text{الحل}}$$

$$K = \left[ e^x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = \left[ e^x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[ e^x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - K$$

$$K = \frac{1}{2} \left( \left[ e^x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[ e^x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \dots$$

$$\int_0^1 \ln \left| \frac{x+2}{x+1} \right| dx \quad \int_0^1 x \sqrt{x+3} dx \quad \int_0^3 (x-1)e^{2x} dx \quad \int_1^2 x^2 \ln x dx \quad \text{تمرين} \quad \text{أحسب} \quad -1$$

$$f(x) = \frac{x}{\cos^2 x} \quad \text{حيث } \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \quad \text{باستعمال المتكاملة بالأجزاء أوجد الدوال الأصلية لـ } f \text{ على } J \quad \text{إذن}$$

$$(J = \int_0^x e^t \sin^2 t dt) \quad (I = \int_0^x e^t \cos^2 t dt) \quad \text{أحسب} \quad -3$$

## 3- المتكاملة بتغيير المتغير

لتكن  $g$  دالة قابلة للاشتقاق على  $[a; b]$  حيث  $g'$  متصلة على  $[a; b]$ . و  $f$  دالة متصلة على  $J$  حيث

$$g([a; b]) = J$$

إذا كانت  $F$  دالة أصلية لـ  $f$  على  $J$  فان  $(F \circ g)'(x) = f(g(x)) \times g'(x)$

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = [F \circ g(x)]_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt$$

**خاصية**

لتكن  $g$  دالة قابلة للاشتقاق على  $[a; b]$  حيث  $g'$  متصلة على  $[a; b]$ . و  $f$  دالة متصلة على  $J$  حيث

$$g([a; b]) = J$$

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt$$

**ملاحظة**

$$dt = g'(x) dx \quad \text{أي} \quad \frac{dt}{dx} = g'(x) \quad \text{فإن} \quad t = g(x)$$

إذا عوضنا في التعبير  $f(g(x)) g'(x) dx$  بالمتغير  $t$  نحصل على  $f(t) dt$

$$\begin{cases} t = g(a) \\ t = g(b) \end{cases} \quad \begin{cases} x = a \\ x = b \end{cases} \quad \text{ولدينا إذا كان}$$

نقول إننا أجرينا تغييراً للمتغير بوضع  $t = g(x)$

$$\left( t = \tan \frac{x}{2} \right) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \cos x} \quad \left( t = \frac{1}{x} \right) \quad \int_1^{\sqrt{3}} \frac{4}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} dx \quad \text{أحسب} \quad \text{أمثلة}$$

$$\left( \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad ; \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \right) \quad \text{ملاحظة}$$

$$\begin{aligned} \left(e^x = t\right) \quad & \int_1^{\ln 2} \sqrt{e^x + 1} \quad ; \quad \left(t = 2 + \sqrt{x}\right) \quad \int_0^1 \frac{dx}{2 + \sqrt{x}} \\ \left(t = \tan x\right) \quad & \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx \quad , \quad \left(t = e^x\right) \quad \int_1^2 \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx \\ \left(t = \frac{e^u - e^{-u}}{2} \quad ; \quad x = \frac{1}{t}\right) \quad & \int_1^2 \frac{1}{x \sqrt{1+x^2}} dx \end{aligned}$$

### III- التكامل والترتيب

#### 1- مقارنة تكاملين

(a) لتكن  $f$  دالة متصلة على  $[a;b]$  و  $F$  دالة أصلية لـ  $f$  على  $[a;b]$

$$\forall x \in [a;b] \quad F'(x) = f(x) \quad \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

إذا كانت  $f$  موجبة على  $[a;b]$  فإن  $F$  تزايدية على  $[a;b]$

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad \text{إذن} \quad F(a) \leq F(b) \quad \text{فإن} \quad a \leq b \quad \text{وحيث أن}$$

خاصية

لتكن  $f$  دالة متصلة على  $(a \leq b) [a;b]$

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad \text{إذا كانت} \quad f \quad \text{موجبة على} \quad [a;b] \quad \text{فإن}$$

(b) خاصية

لتكن  $f$  و  $g$  دالتي متصلتين على  $(a \leq b) [a;b]$

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \quad \text{إذا كانت} \quad f \leq g \quad \text{على} \quad [a;b] \quad \text{فإن}$$

مثال

$$I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx \quad \text{نؤطر}$$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{2} dx \leq I \leq \int_0^1 x^2 dx \quad \text{ومنه} \quad \forall x \in [0;1] \quad 1 \leq 1+x \leq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^2}{1+x} \leq x^2 \quad \text{لدينا}$$

$$\frac{1}{6} \leq I \leq \frac{1}{3} \quad \text{إذن}$$

(c) خصائص

- أ- لتكن  $f$  دالة متصلة على  $(a \leq b) [a;b]$

$$\int_a^b f(x) dx \leq 0 \quad \text{إذا كانت} \quad f \quad \text{سالبة على} \quad [a;b] \quad \text{فإن}$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad \text{ب-}$$

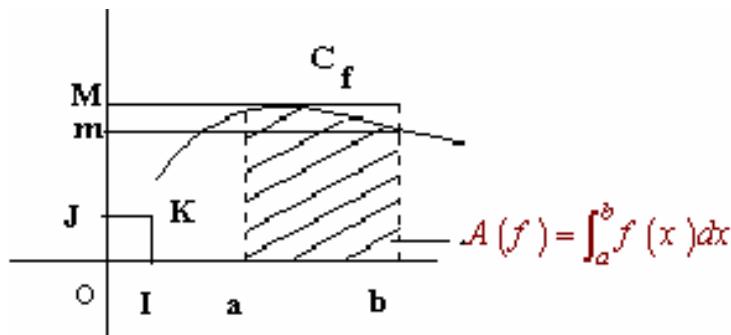
ج- لتكن  $M$  القيمة القصوية و  $m$  القيمة الدنيا للدالة  $f$  على  $[a;b]$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

ملاحظة

# هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

إذا كانت  $f$  موجبة على  $[a;b]$  فان المساحة  $A(f) = \int_a^b f(x)dx$  في معلم م.م محصورة بين مساحتي المستطيل الذي بعديه  $M$  و  $(b-a)$  و المستطيل الذي بعديه  $m$  و  $(b-a)$ .



مثال

$$0 \leq I \leq \sqrt{2} \quad \text{نبين أن } I = \int_1^3 \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx$$

الدالة  $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  موجبة و تناقصية على  $[0;+\infty)$  ومنه

$$0 \leq I \leq (3-1)\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{اذن}$$

## - القيمة المتوسطة لدالة متصلة في قطعة

لتكن  $f$  دالة متصلة على  $[a \leftarrow b)$  و  $M$  القيمة القصوية و  $m$  القيمة الدنيا للدالة  $f$  على  $[a;b]$

إذن  $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$  ومنه حسب مبرهنة القيمة الوسطية يوجد على الأقل  $c$  في  $[a;b]$

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \quad \text{حيث}$$

خاصية و تعريف

لتكن  $f$  دالة متصلة على  $[a;b] \quad (a \neq b)$

العدد الحقيقي  $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$  يسمى القيمة المتوسطة للدالة  $f$  على  $[a;b]$ .

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \quad \text{حيث } c \text{ في } [a;b]$$

ملحوظة

إذا كانت  $f$  موجبة على  $[a;b]$  فان المساحة  $A(f) = \int_a^b f(x)dx$  هي مساحة المستطيل الذي بعده  $(b-a)$  و  $f(c)$ .

تمرين 1 - أحسب القيمة المتوسطة للدالة  $f$  على  $I$  في الحالتين التاليتين

$$I = [0;1] \quad f(x) = \frac{x^3 + 5x^2 + x + 3}{x+1} \quad (b) ; \quad I = [-1;0] \quad f(x) = (x-1)e^x \quad (a)$$

- أطر الدالة  $f$  على  $[0;1]$  حيث  $f(x) = \arctan x$

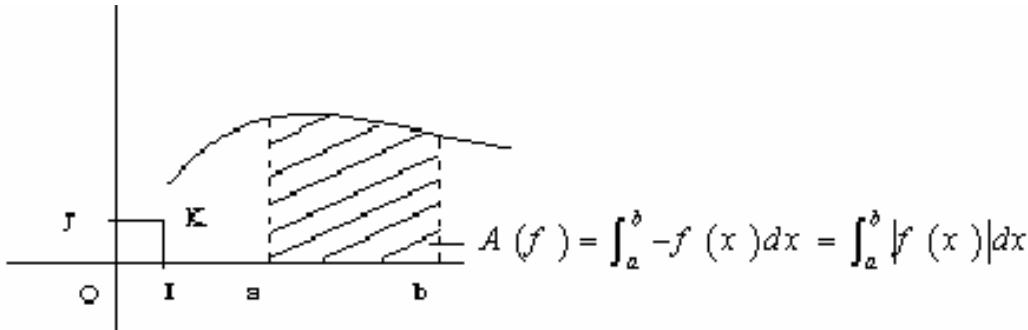
الجواب عن السؤال 2 لدينا  $f$  قابلة للاشتقاق على  $[0;1]$  و  $\forall x \in [0;1]$  و منه

$$\frac{x}{2} \leq f(x) \leq x \quad \forall x \in [0;1] \quad \int_0^x \frac{1}{2} dt \leq \int_0^x f'(t)dt \leq \int_0^x dt \quad \forall x \in [0;1] \quad \frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 1$$

## 1- حساب المساحات الهندسية

المستوى منسوب إلى م.م.م  $(o; \vec{i}; \vec{j})$

لتكن  $f$  دالة متصلة على  $[a; b]$  و  $C_f$  منحناها و  $\Delta(f)$  الحيز المحصور بين  $C_f$  و محور الأفاصيل  
 $(\Delta_2) : x = b$        $(\Delta_1) : x = a$       و المستقيمين



\* إذا كانت  $f$  موجبة على  $[a; b]$  فان مساحة  $\Delta(f)$  هي بوحدة قياس المساحات

إذا كان كانت  $f$  سالبة على  $[a; b]$  مساحة هي مساحة

$$A(f) = \int_a^b -f(x)dx = \int_a^b |f(x)|dx$$

\* إذا كانت  $f$  تغير إشارتها على  $[a; b]$  مثلا يوجد  $c$  من  $[a; b]$  حيث  $f$  موجبة على  $[a; c]$  و سالبة على

$[c; b]$

الحيز  $\Delta(f)$  على  $[a; b]$  هو اتحاد  $\Delta(f)$  على  $[a; c]$  و  $\Delta(f)$  على  $[c; b]$

$$A(f) = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b -f(x)dx = \int_a^c |f(x)|dx + \int_c^b |f(x)|dx = \int_a^b |f(x)|dx$$

خاصية

المستوى منسوب إلى م.م.م  $(o; \vec{i}; \vec{j})$

لتكن  $f$  دالة متصلة على  $[a; b]$  و  $C_f$  منحناها و  $\Delta(f)$  الحيز المحصور بين  $C_f$  و محور الأفاصيل  
 $(\Delta_2) : x = b$        $(\Delta_1) : x = a$       و المستقيمين

مساحة الحيز  $\Delta(f)$  هو  $\int_a^b |f(x)|dx$

أصطلاحات

العدد الموجب  $\int_a^b |f(x)|dx$  يسمى المساحة الهندسية للحيز  $\Delta(f)$ .

العدد الحقيقي  $\int_a^b f(x)dx$  يسمى المساحة الجبرية للحيز  $\Delta(f)$ .

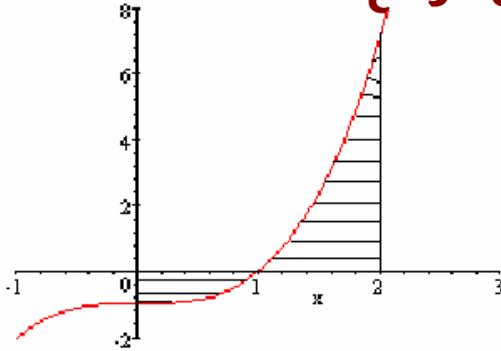
مثال

$$f(x) = x^3 - 1$$

نعتبر حدد مساحة الحيز المحصور بين المنحنى  $C_f$  و محور الأفاصيل و المستقيمين ذا المعادلتين

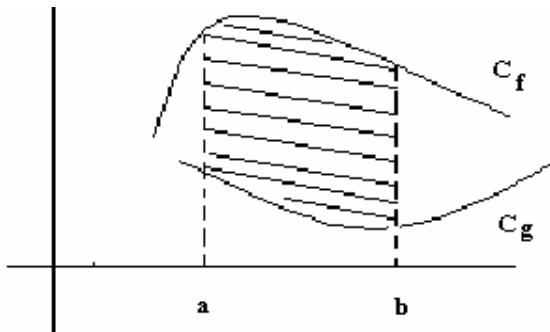
$$x = 2 ; \quad x = 0$$

$$A = \int_0^2 |f(x)|dx = \int_0^1 (1 - x^3)dx + \int_1^2 (x^3 - 1)dx = \frac{7}{2}u \quad (u = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|)$$



### -2 مساحة حيز محصور بين منحنيين

لتكن  $f$  و  $g$  دالتيں متصلتين على  $[a;b]$  و  $\Delta$  هو الحيز المحصور بين  $C_f$  و  $C_g$  و المستقيمين  $(o;\bar{i};\bar{j})$  في م.م.م  $(\Delta_2) : x = b \quad (\Delta_1) : x = a$



إذا كان  $f \geq g \geq 0$  فان  $A(\Delta) = A(f) - A(g)$

$$A(\Delta) = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

إذا كانت  $f \leq g$  و كيما كانت إشارتي  $f$  و  $g$  و باتباع نفس الطريقة نحصل على أن

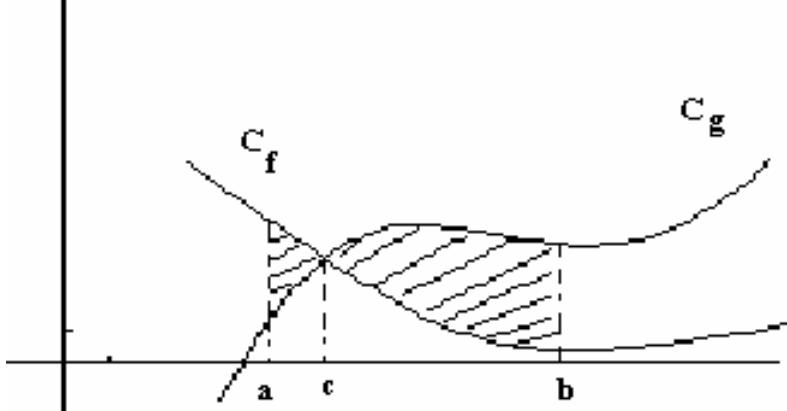
$$A(\Delta) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

خاصية

لتكن  $f$  و  $g$  دالتيں متصلتين على  $[a;b]$  مساحة الحيز  $\Delta$  المحصور بين  $C_f$  و  $C_g$  و المستقيمين  $(\Delta_2) : x = b \quad (\Delta_1) : x = a$

وحدة قياس المساحات  $A(\Delta) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$  هي

ملاحظة



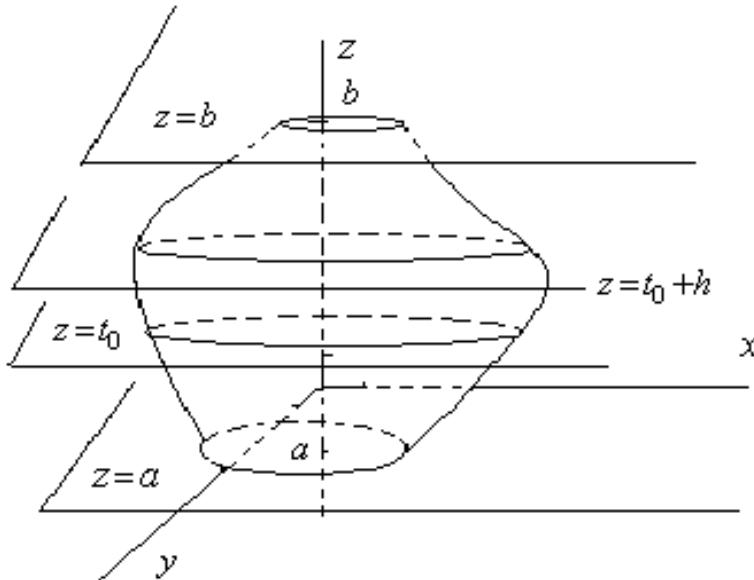
$$A(\Delta) = \int_a^c (f(x) - g(x)) dx + \int_c^b (g(x) - f(x)) dx$$

الفضاء منسوب إلى معلم م.م  $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  نفترض أن وحدة قياس الحجم هي حجم المكعب الذي طول حرفه

$\|\vec{i}\|$

## ـ 1- حجم مجسم في الفضاء

ليكن  $S$  مجسما محصورا بين المستويين المعرفين بالمعادلتين  $z = b$  و  $z = a$  نرمز بـ  $S(t)$  إلى مساحة مجموعة النقط  $(x; y; z)$  من  $S$  حيث  $z = t$  و بالرمز  $V(t)$  إلى حجم مجموعة النقط من  $S$  المحصور بين المستويين  $z = t_0$  و  $z = t_0 + h$  ليكن  $t_0$  من  $[a; b]$  و  $h \in [a; b]$  عددا موجبا حيث



حجم مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  من  $S$  المحصورة بين  $z = t_0$  و  $z = t_0 + h$  هو  $V(t_0 + h) - V(t_0)$  ومن جهة ثانية هذا الحجم محصور بين حجمي الأسطوانتين التي ارتفاعهما  $h$  و مساحتها قاعدتيهما على التوالي  $S(t_0 + h)$  و  $S(t_0)$

إذا افترضنا أن  $S(t_0) \leq S(t_0 + h)$  فإن  $S(t_0) \leq S(t_0 + h)$

$$S(t_0) \leq \frac{V(t_0 + h) - V(t_0)}{h} \leq S(t_0 + h)$$

و إذا افترضنا أن التطبيق  $S(t) \rightarrow V(t)$  متصل على  $[a; b]$  فإن

إذن الدالة  $V(t) \rightarrow V'(t) = S(t)$  و

أي أن الدالة  $V(t) \rightarrow S(t)$  دالة أصلية للدالة  $V(t) \rightarrow V(t)$  على  $[a; b]$

$$\forall t \in [a; b] \quad V(t) = \int_a^t S(x) dx$$

إذن حجم المجسم  $S$  هو  $V = V(b) = \int_a^b S(x) dx$  وحدة قياس الحجم.

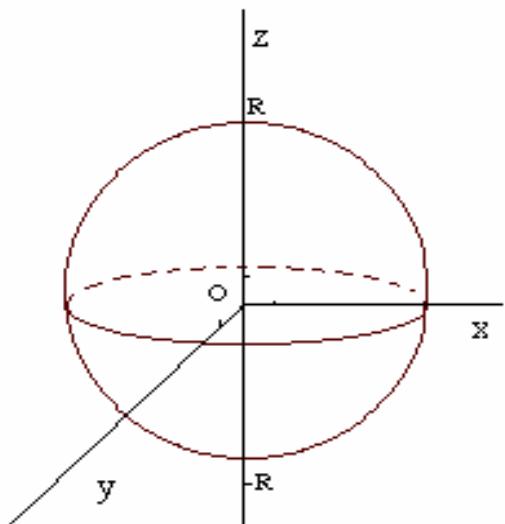
### خاصية

الفضاء منسوب إلى معلم م.م

ليكن  $S$  مجسما محصورا بين المستويين المعرفين بالمعادلتين  $z = b$  و  $z = a$

نرمز بـ  $S(t)$  إلى مساحة مجموعة النقط  $(x; y; z)$  من  $S$  حيث

إذا كان أن التطبيق  $S(t) \rightarrow V(t)$  متصلة على  $[a; b]$  فإن حجم المجسم  $S$  هو  $V = \int_a^b S(z) dz$  وحدة قياس الحجم.

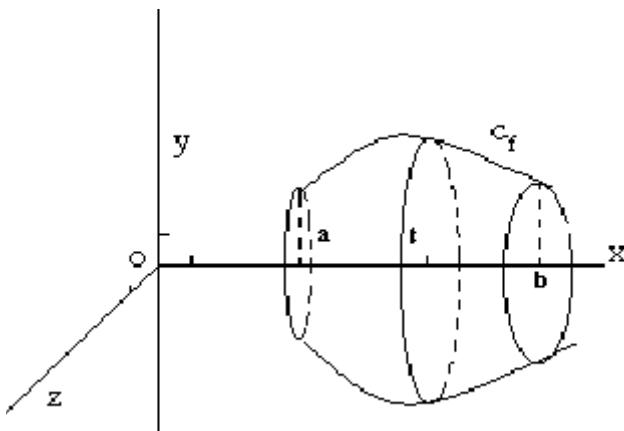


تمرين  
أحسب حجم الفلكة التي مركزها  $O$  وشعاعها  $R$ .  
الحل : نفترض أن الفضاء منسوب م.م.م أصله  $O$ . الفلكة محصورة بين المستويين المعرفين على التوالي  $z = -R$  ;  $z = R$  بالمعادلتين

مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  من الفلكة حيث  $-R \leq t \leq R$   $z = t$  هي قرص شعاعه  $S(t) = \pi(R^2 - t^2)$  ومساحته بما أن التطبيق  $\frac{4}{3}\pi R^3$  فان  $t \rightarrow \pi(R^2 - t^2)$  متصلة على  $[-R; R]$

## 2- حجم مجسم الدوران

لتكن  $f$  دالة متصلة على  $[a; b]$  و  $C_f$  منحناها في م.م.م  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  إذا دار  $C_f$  حول المحور  $(O; \vec{i})$  دورة كاملة فإنه يولد مجسمًا يسمى مجسم الدوران



في هذه الحالة لدينا مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  من الجسم بحيث  $x = t$  هي قرص مساحته  $S(t) = \pi f^2(t)$  التطبيق  $t \rightarrow \pi f^2(t)$  متصلة على  $[a; b]$  إذن حجم المجسم الدوراني هو

$$V = \int_a^b \pi f^2(t) dt$$

خاصية

الفضاء منسوب إلى م.م.م أصله  $o$  ، و  $f$  دالة متصلة على  $[a; b]$

حجم مجسم الدوران المولد عن دوران المنحنى  $C_f$  حول المحور  $(OX)$  هو  $V = \int_a^b \pi f^2(t) dt$  بوحدة قياس الحجم .

تمرين

أنشئ  $C_f$  وحدد حجم مجسم الدوران الذي يولده دوران المنحنى  $C_f$  حول المحور  $(OX)$  في المجال  $[1; e]$

## IV- حساب بعض النهايات باستخدام التكامل

$$f(x) = \frac{1}{2}x \ln x$$

لتكن  $f$  متصلة على  $[a; b]$ .

$$s_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) ; \quad S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right)$$

لكل عنصر  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  نضع

إذا كانت  $f$  رتبية قطعا على  $[a; b]$  أو قابلة للاشتقاق و  $f'$  محدودة على  $[a; b]$  فان المتتاليتين  $(S_n)$  و  $(s_n)$

متقاربيتين و تقبلان التكامل  $\int_a^b f(x) dx$  نهاية مشتركة لهما عندما يؤول  $n$  إلى  $+\infty$

مثال

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

نعتبر  
حدد  $\lim u_n$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} + \frac{1}{1 + \frac{2}{n}} + \dots + \frac{1}{1 + \frac{n}{n}} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

لدينا

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

حيث

لدينا  $f$  متصلة وتناقصية على  $[1; 2]$  ومنه المتتالية  $(u_n)_{n \geq 1}$  متقاربة و متقاربة وتناقصية على  $[1; 2]$

حالة خاصة

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \text{ يؤول الى القيمة المتوسطة } \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

المتوسط الحسابي

تمرين

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^2 + k^2} ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{n} ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}} ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}$$

أحسب النهايات