



I. تكامل دالة f متصلة على قطعة $[a,b]$

: تعريف: 01

f دالة متصلة على قطعة $[a,b]$ حيث F دالة أصلية ل f .

العدد الحقيقي $F(b) - F(a)$ يسمى تكامل f من a إلى b . و نرمز له ب: b . و يقرأ : التكامل من a إلى b ل $f(x)dx$ من a إلى b .

II. ملحوظة: 02

(أي غير مرتبط باختيار أي دالة أصلية سواء كانت F أو G للدالة f) .

في الكتابة $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(t)dt = \dots$ يمكن تعويض المتغير x بأي متغير و منه :

$$\int_a^a f(t)dt = [F(t)]_a^a = F(a) - F(a) = 0$$

• تمارين : أحسب: $\int_{-\sqrt{3}}^0 \frac{5}{1+x^2} dx$ و $4 \times \int_1^2 \sqrt[3]{x^2} dx$ و $\int_0^1 x^2 e^{x^3+4} dx$ و $\int_2^{1+e} \frac{4}{x-1} dx$ و $\int_0^1 (x^2 - 2x) dx$ و $\int_0^1 \cos x dx$.

أجوبة :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$$

$$\int_0^1 (x^2 - 2x) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_0^1 = \left(\frac{1}{3}1^3 - 1^2 \right) - \left(\frac{1}{3}0^3 - 0^2 \right) = -\frac{2}{3}$$

$$\int_2^{1+e} \frac{4}{x-1} dx = [4 \ln|x-1|]_2^{1+e} = 4(\ln e - \ln 1) = 4$$

$$\int_0^1 x^2 e^{x^3+4} dx = \int_0^1 (x^3 + 4)' e^{x^3+4} dx = [e^{x^3+4}]_0^1 = e^5 - e^4$$

$$4 \times \int_1^2 \sqrt[3]{x^2} dx = 4 \times \int_1^2 x^{\frac{2}{3}} dx = 4 \times \left[\frac{1}{\frac{2}{3}+1} x^{\frac{2}{3}+1} \right]_1^2 = 4 \times \frac{3}{5} \left(2^{\frac{5}{3}} - 1^{\frac{5}{3}} \right) = \frac{12}{5} \left(\sqrt[3]{2^5} - 1 \right)$$

$$\int_{-\sqrt{3}}^0 \frac{5}{1+x^2} dx = [5 \times \arctan x]_{-\sqrt{3}}^0 = 5 \times (\arctan 0 - \arctan(-\sqrt{3})) = 5 \times \left(0 + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{5\pi}{3}$$

III. خصائص التكامل : علاقة شال – خطانية التكامل – التكامل و الترتيب:

01. خصائص :
1. خاصية :

• f قابلة للاشتقاق على $[a,b]$ و f' متصلة على $[a,b]$ لدينا : $\int_a^b f'(x)dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$

• $\int_a^b cdx = [cx]_a^b = c(b-a)$ لدينا : $c \in \mathbb{R}$

2. خصائص :



f دالة متصلة على $[a,b]$. لدينا :

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$
 و $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ و $\int_a^a f(x)dx = 0$

3. خصائص : (خطانية التكامل و التكامل و الترتيب)

- f و g متصلتين على مجال I مع a و b من I ; α و β من \mathbb{R} . لدينا :
- خطانية التكامل :** $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$ و $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$
- التكامل و الترتيب :** f موجب على $[a,b]$ ، فإن $0 \leq \int_a^b f(x)dx \leq b-a$ فإن تكاملها موجب
- $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ و $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \quad \forall x \in [a,b]; f(x) \leq g(x)$
- $m \leq \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)dx \leq M$ او $(b-a)m \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)M \quad \forall x \in [a,b]: m \leq f(x) \leq M$

: برهان 4

- نبرهن على :** $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- لتكن F و G دالتين أصليتين ل f و g على $[a,b]$ (لأن f و g متصلتين على $[a,b]$. $F+G$ دالة أصلية ل $f+g$. من جهة أخرى :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx &= [F(x)]_a^b - [G(x)]_a^b \\ &= (F(b) - F(a)) + (G(b) - G(a)) \\ &= (F(b) + G(b)) - (F(a) - G(a)) \\ &= ((F+G)(b)) - ((F+G)(a)) \\ &= \int_a^b (f+g)(x)dx \end{aligned}$$

خلاصة : $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

- نبرهن على :** $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- لتكن F دالة أصلية ل f على $[a,b]$ (لأن f موجبة على $[a,b]$) و بالتالي F تزايدية على $[a,b]$. لدينا :

$$\begin{aligned} a \leq b \Rightarrow F(a) \leq F(b) ; (f \nearrow) \\ \Rightarrow F(b) - F(a) \geq 0 \\ \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0 \end{aligned}$$

خلاصة : $\int_a^b f(x)dx \geq 0$



$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \quad \forall x \in [a,b]; f(x) \leq g(x)$$

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

$$(1) : \forall x \in [a,b] ; -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

لدينا :

لدينا :

$$(1) \Rightarrow -\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

$$\text{خلاصة : } \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

5. تمرين تطبيقي :

$$\text{أحسب : } \int_{-3}^2 |2x - 4|dx$$

$$(2) \text{ نضع : } B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)dx \quad \text{و} \quad A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)dx$$

(3) أ - أحسب : $A - B$ و $A + B$. ب - استنتج قيمة كل من A و B .

$$(4) \text{ بين أن : } \int_2^5 \ln(x+1)dx \leq \int_2^5 \ln(x+3)dx$$

III. دالة معرفة بتكامل :

01. خاصية :

f دالة متصلة على مجال I و $a \in I$. الدالة العددية F المعرفة بما يلي :

$$F : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

هي الدالة الأصلية ل f على I و التي تنعدم في a .

02. مثال :

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt = [\ln|t|]_1^x = \ln|x| - \ln|1| = \ln x \quad \forall x \in]0, +\infty[\quad : F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

خلاصة : الدالة F هي الدالة الأصلية ل f التي تنعدم في 1 .

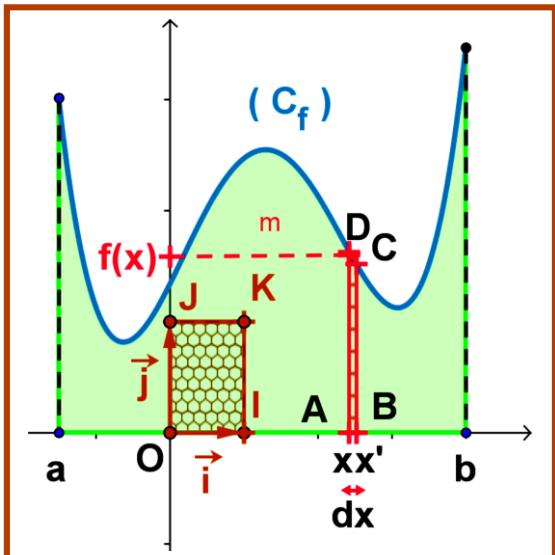
IV. التأويل الهندسي ل $\int_a^b f(x)dx$:

01. تقديم :

في هذه الفقرة نأخذ المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد (O, i, j)

f دالة متصلة و موجبة على القطعة $[a, b]$ (أي $f(x) \geq 0$) .

نضع : $\vec{OI} = \vec{i}$ و $\vec{OJ} = \vec{j}$ و نعتبر النقطة K حيث OIKJ مستطيل .



وحدة قياس المساحات هي مساحة المستطيل $OIKJ$ ونرمز لها بالرمز b :

$u.a$ ($u.a = \text{unité aire}$)

(C_f) منحني الدالة f على $[a, b]$. (مع العلم أن (C_f) يوجد فوق محور الأفاصيل لأن $f(x) \geq 0$)

لنععتبر Δ_f الحيز من المستوى (P) المحصور بين المنحني (C_f) ومحور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي $x=a$ و $x=b$.

لدينا : $\Delta_f = \{M(x, y) / a \leq x \leq b \text{ و } 0 \leq y \leq f(x)\}$

لنععتبر A مساحة الحيز Δ_f من المستوى (P) معبر عنها ب $u.a$. نأخذ : $x \in [a, b]$.

على محور الأفاصيل نعتبر العدد x' حيث $x' > x$ و طول القطعة $[x, x']$ هو يقارب من 0 (أي $dx \sim 0$).

ملحوظة: المساحة تحسب بالتكامل ومرتبطة بإشارة الدالة f على $[a, b]$

. $f(x+dx) \sim f(x)$ متصلة f و بمان $x+dx \sim x$

. $A\left(\begin{matrix} x \\ 0 \end{matrix}\right) ; B\left(\begin{matrix} x' \\ 0 \end{matrix}\right) ; C\left(\begin{matrix} x \\ f(x) \end{matrix}\right) ; D\left(\begin{matrix} x' \\ f(x) \end{matrix}\right)$ حيث $\Delta_x = ABCD$

. $S_x = f(x) \times dx$ هي : Δ_x

لدينا : مجموع مساحات المستطيلات S_x عندما يتغير x من a إلى b أي $b - a$ هو يساوي مساحة الحيز Δ_f

. $\sum_{x=a}^{x=b} S_x = \sum_{x=a}^{x=b} f(x) \times dx = \int_a^b f(x) \times dx (\times u.a)$ ومنه نكتب :

. $\sum_{x=a}^{x=b} f(x) \times dx = \int_a^b f(x) dx (\times u.a)$ و منه :

خلاصة :

مجموع مساحات المستطيلات S_x عندما يتغير x من a إلى b أي $b - a$ هو التكامل $\int_a^b f(x) dx$ مضروب في $u.a$ وحدة المساحة.

($\int_a^b f(x) dx (\times u.a)$) هو : مساحة Δ_f الحيز من المستوى (P) المحصور بين المنحني (C_f) ومحور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي $x=b$ و $x=a$.

مساحة $\int_a^b f(x) dx (\times u.a)$ هو $\Delta_f = \{M(x, y) / a \leq x \leq b \text{ و } 0 \leq y \leq f(x)\}$

خاصية 02 :

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعمد (O, i, j) . f دالة متصلة و موجبة على القطعة $[a, b]$ و (C_f) منحناها .

A مساحة Δ_f الحيز من المستوى (P) المحصور بين المنحني (C_f) ومحور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي $x=b$ و $x=a$.

. $A = \int_a^b f(x) dx (\times u.a)$ هو $x=b$



La valeur moyenne V 01. خاصية وتعريف:

- متصلة على مجال I مع a و b من I حيث $a < b$.
- يوجد على الأقل عنصر c من المجال $[a,b]$ حيث: $(b-a) \times f(c) = \int_a^b f(x) dx$
- العدد الحقيقي: $f(c) = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(x) dx$ يسمى القيمة المتوسطة للدالة f على مجال $[a,b]$.

برهان: 02

✓ طريق 1:
لدينا:

$$([a,b]) \text{ لأن } f \text{ متصلة على } [a,b] \Rightarrow f([a,b]) = [m,M]$$

$$m \leq \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx \leq M \quad \text{أو} \quad (b-a)m \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b-a)M$$

فإن: $\forall x \in [a,b]: m \leq f(x) \leq M$

$$\text{نحصل على: } \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx \in [m,M] = f([a,b])$$

بيان f متصلة على $[a,b]$ و حسب مبرهنة القيم الوسيطية: $\exists c \in [a,b] : f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

✓ طريق 2:

F دالة اصلية ل f على $[a,b]$. لأن f متصلة على $[a,b]$.

$$\text{حسب مبرهن تزايدات المنتهية: } \exists c \in]a,b[/ F'(c) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a}$$

$$\exists c \in]a,b[/ f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx ; \left(\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \right)$$

$$\text{خلاصة: } \exists c \in]a,b[/ f(c) = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx$$

مثال: 03

f متصلة على مجال $[0,2]$ حيث: حدد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = 3x$

لدينا:

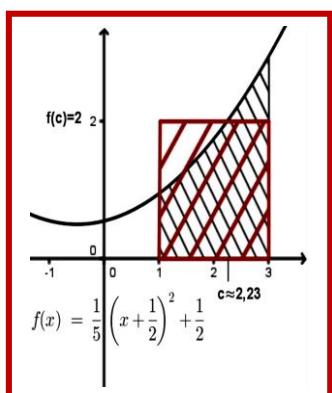
$$f(c) = \frac{1}{2-0} \times \int_0^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \times \int_0^2 3x dx = \frac{1}{2} \times \left[\frac{3}{2} x^2 \right]_0^2 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} [2^2] = 3$$

خلاصة: القيمة المتوسطة للدالة f على مجال $[0,2]$ هي $f(c) = 3$

$$(b-a) \times f(c) = \int_a^b f(x) dx \quad \text{أي} \quad f(c) = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(x) dx$$

تأويل الهندسي للنتيجة المحصل عليها: 04

يوجد مستطيل، يُعَدُّه (أي الطول والعرض) $(b-a)$ و (c) مساحته هي المساحة $A = \int_a^b f(x) dx$





VI. تقنيات حساب التكامل :

A. المتكاملة بالأجزاء L' integration par parties

خاصية: 01

لتكن u و v دالتين قابلتين للاشتغال على المجال $[a, b]$ حيث u' و v' متصلتين على $[a, b]$ لدينا:

$$\int_a^b u(x) \times v'(x) dx = \underbrace{\left[u(x) \times v(x) \right]_a^b}_{(1)} - \underbrace{\int_a^b u'(x) \times v(x) dx}_{(3)}$$

برهان: 02

بيان: u و v دالتين قابلتين للاشتغال على المجال $[a, b]$ إذن الدالة $u \times v$ قابلة للاشتغال على $[a, b]$ مع

$$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$$

$$u \times v' = (u \times v)' - u' \times v$$

الدوال: $u \times v$ و $u' \times v$ و $u \times v'$ متصلة على $[a, b]$ لأن u' و v' متصلتين على $[a, b]$ و u و v متصلتين على $[a, b]$

($u \times v$)' = $u' \times v + u \times v'$ بحسب (1)

$$u \times v' = (u \times v)' - u' \times v$$

$$\int_a^b u(x) \times v'(x) dx = \int_a^b ((u \times v)'(x) - u'(x) \times v(x)) dx$$

$$= \int_a^b (u \times v)'(x) dx - \int_a^b u'(x) \times v(x) dx \quad \text{ومنه: } u \times v' = (u \times v)' - u' \times v$$

$$= \left[u(x) \times v(x) \right]_a^b - \int_a^b u'(x) \times v(x) dx$$

$$\int_a^b u(x) \times v'(x) dx = \left[u(x) \times v(x) \right]_a^b - \int_a^b u'(x) \times v(x) dx \quad \text{خلاصة:}$$

طريقة وضع المتكاملة بالأجزاء: 03

$$u(x) = \dots \quad u'(x) = \dots$$

$$(1) \downarrow \quad (2) \searrow \quad - \quad \downarrow (3)$$

$$v'(x) = \dots \quad v(x) = \dots$$

أمثلة: 04

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx \quad (1)$$

جواب:

لحسب I باستعمال المتكاملة بالأجزاء: نضع:

$$u(x) = x \quad u'(x) = 1$$

$$(1) \downarrow \quad (2) \searrow \quad - \quad \downarrow (3)$$

$$v'(x) = \cos x \quad v(x) = \sin x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = \left[x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \times \sin x dx$$

ومنه:



$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} - 0 \sin 0 \right) - \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{\pi}{2} + \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right) = \frac{\pi}{2} + 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1
 \end{aligned}$$

خلاصة: $I = \frac{\pi}{2} - 1$

$$J = \int_1^e \ln(x) dx \quad (2)$$

لحسب I باستعمال المتكاملة بالأجزاء: نضع:

$$u(x) = \ln(x) \quad u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$(1) \downarrow \quad (2) \searrow \quad - \quad \downarrow (3)$$

$$v'(x) = x \quad v(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$$\begin{aligned}
 \int_1^e \ln(x) dx &= \left[\frac{1}{2}x^2 \ln(x) \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times \frac{1}{2}x^2 dx \\
 &= \frac{1}{2}(e^2 \ln(e) - 1^2 \ln(1)) - \frac{1}{2} \int_1^e x dx
 \end{aligned}$$

$$J = \frac{1}{4}(e^2 + 1) = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}(e^2 - 1^2) = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$$

B. المتكاملة بتغيير المتغير : L' integration par changement de variable :

01 خاصية:

لتكن f و g دالتين حيث f متصلة على خلي مجال J و g قابلة للاشتقاق على المجال I و دالتها المشتقة ' g متصلة على I مع

$$\int_a^b f(g(x)) \times g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt \quad : \text{ لدينا لكل } a \text{ و } b \text{ من I . } g(I) \subset J$$

برهان 02:

نعتبر F دالة أصلية ل f على J إذن : $F' = f$ لدينا :

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(g(x)) \times g'(x) dx &= \int_a^b F'(g(x)) \times g'(x) dx \\
 &= \int_a^b (F \circ g)'(x) \times g'(x) dx \\
 &= [F \circ g(x)]_a^b \\
 &= F \circ g(b) - F \circ g(a) \\
 &= F(g(b)) - F(g(a)) \\
 &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt
 \end{aligned}$$

خلاصة : $\int_a^b f(g(x)) \times g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt$



03 طريقة وضع المتكاملة بتغير المتغير :
نضع :

$$dt = g'(x)dx \quad \text{و منه: } t = g(x)$$

$$t = g(b) \quad \text{فإن } x = b \quad \text{. ثم: } t = g(a) \quad \text{فإن } x = a$$

$$\int_a^b f(g(x)) \times g'(x) dx = \int_a^b \underbrace{f(g(x))}_{f(t)} \times \underbrace{g'(x) dx}_{dt} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt$$

04 أمثلة :
مثال 1 :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x dx \quad \text{نحسب:}$$

$$dt = \cos x dx \quad \text{و منه: } t = g(x) = \sin x$$

$$t = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \quad \text{فإن } x = \frac{\pi}{2} \quad \text{. ثم: } t = g(0) = \sin 0 = 0 \quad \text{فإن } x = 0$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \underbrace{\cos x dx}_{dt} = \int_0^1 t^3 dt = \frac{1}{4} [t^4]_0^1 = \frac{1}{4}$$

مثال 2 :

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \quad \text{نحسب:}$$

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} \quad \text{و كذلك: } \cos t dt = dx \quad \text{و منه: } sint = x$$

$$t = \frac{\pi}{2} \quad \text{من أجل: } x = 0 \quad \text{فإن } sint = 0 \quad \text{أي } x = 1 \quad \text{. ثم: } t = 0 \quad \text{من أجل: } x = 0 \quad \text{فإن } sint = 1 \quad \text{أي } x = 1$$

و منه:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^1 \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\sqrt{1-\sin^2 t}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt ; \left(|\cos t| = \cos t, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \right)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} t + \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4} \quad \text{خلاصة:}$$

مثال 3 :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\cos x}}{e^{\cos x} + 1} \sin x dx \quad \text{نحسب:}$$

$$dt = -\sin x e^{\cos x} dx \quad \text{و منه: } t = g(x) = e^{\cos x}$$

$$t = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\cos \frac{\pi}{2}} = 1 \quad \text{فإن } x = \frac{\pi}{2} \quad \text{. ثم: } t = g(0) = e^{\cos 0} = e \quad \text{من أجل: } x = 0 \quad \text{فإن } x = 0$$



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\cos x}}{e^{\cos x} + 1} \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{1}{e^{\cos x} + 1}}_{\frac{1}{t+1}} \underbrace{\sin x e^{\cos x} dx}_{-dt} = - \int_e^1 \frac{1}{t+1} dt = - [\ln|t+1|]_e^1 = \ln \frac{2}{1+e}$$

تطبيقات حساب التكامل: VII

حساب نهايات بعض الممتاليات: 01
مرينہ 1 :

دالة متصلة و موجبة و رتبية على $[a, b]$. حيث :

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} f(x_{k+1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{k=n} f\left(a + k \times \frac{b-a}{n}\right) \text{ و } \mathcal{A}_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} f(x_k) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(a + k \times \frac{b-a}{n}\right)$$

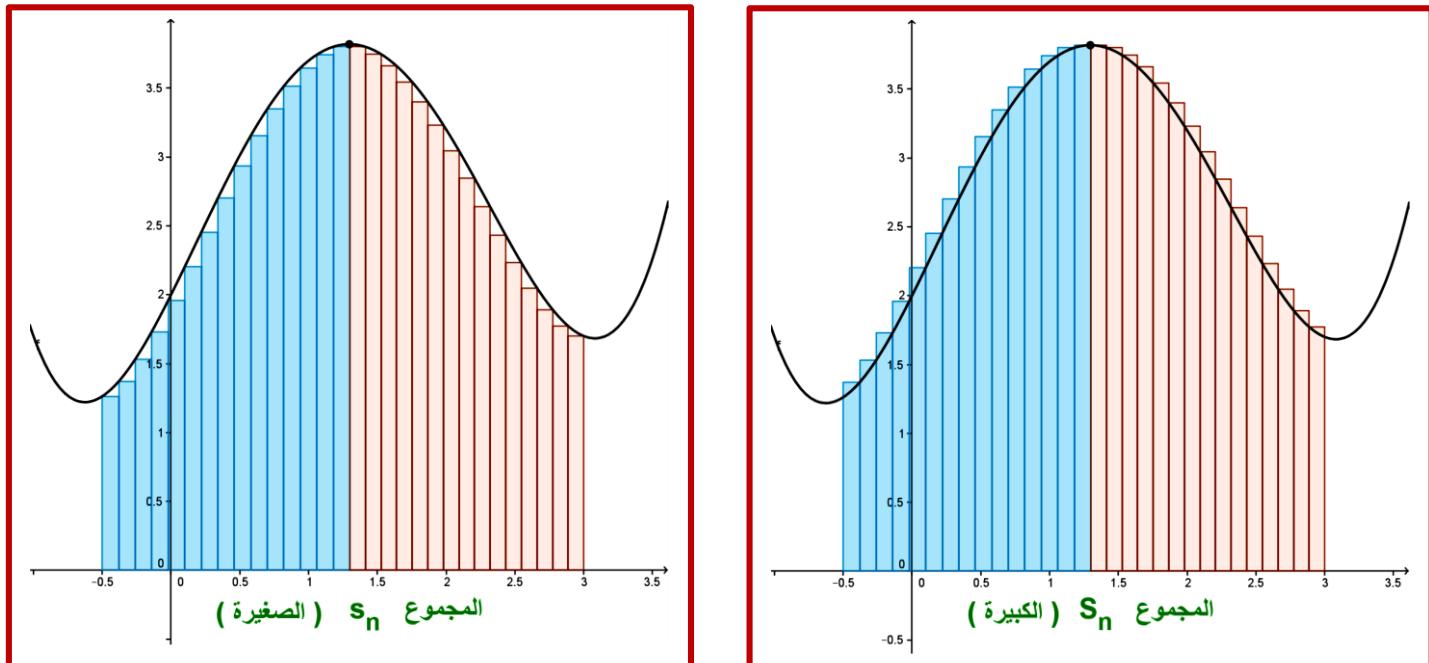
لدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_n = \int_a^b f(x) dx$

- دالة متصلة و موجبة و رتبية على $[a, b]$.
- القطعة $[a, b]$ يتم تقسيمها إلى n قطعة متساوية الطول على الشكل $[x_k, x_{k+1}]$ مع $x_n = b$ و $x_0 = a$ و $k \in 0, n$ (القطع هي $[x_k, x_{k+1}]$ و ذلك بوضع $[x_{n-1}, x_n]$ و و $[x_2, x_3]$ و $[x_1, x_2]$ و $[x_0, x_1]$)
- لدينا : $x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$
- نعتبر Δ_k الحيز المحصور بين المنحني (C_f) للدالة f و محور الأفاسيل و المستقيمين ذي المعادلتين $x_k = x$ و $x_{k+1} = x$.
- نضع : \mathcal{A}_k مساحة الحيز Δ_k . لدينا : $\mathcal{A}_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx$.
- بمان : f رتبية على $[a, b]$ إذن f رتبية على $[x_k, x_{k+1}]$ لدينا :

 - (1) $x_k \leq x \leq x_{k+1} \Rightarrow f(x_k) \leq f(x) \leq f(x_{k+1})$;
 - (2) $x_k \leq x \leq x_{k+1} \Rightarrow f(x_{k+1}) \leq f(x) \leq f(x_k)$;

- ✓ ندرس حالة f تزايدية :

$$\begin{aligned}
 (1) &\Rightarrow \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k) dx \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = \mathcal{A}_k \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_{k+1}) dx \\
 &\Rightarrow (x_{k+1} - x_k) f(x_k) \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \leq (x_{k+1} - x_k) f(x_{k+1}) ; f(x_k) = C^t, f(x_{k+1}) = C^t \\
 &\Rightarrow \frac{b-a}{n} f(x_k) \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \leq \frac{b-a}{n} f(x_{k+1}) \\
 &\Rightarrow \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{b-a}{n} f(x_k) \leq \sum_{k=0}^{k=n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = \sum_{k=0}^{k=n-1} \mathcal{A}_k = \int_a^b f(x) dx \leq \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{b-a}{n} f(x_{k+1}) \\
 &\Rightarrow \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} f(x_k) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} f(x_{k+1}) \\
 &\Rightarrow \mathcal{A}_n \leq \int_a^b f(x) dx \leq S_n \quad \left(\mathcal{A}_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} f(x_k) ; S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} f(x_{k+1}) \right)
 \end{aligned}$$



لدينا : مساحة المستطيل الصغير و $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k) dx$

لدينا : مجموع مساحات المستطيلات الصغرى و S_n مجموع مساحات المستطيلات الكبرى .

$$S_n - \alpha_n = \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a))$$

. (3) $0 \leq \int_a^b f(x) dx - \alpha_n \leq S_n - \alpha_n \leq \int_a^b f(x) dx \leq S_n$ ومنه :

(4) عندما : يكون n عدد القطع التي قسمت بها القطعة $[a,b]$ يؤول إلى $+\infty$ نحصل على $S_n = \alpha_n$ منه :

حسب (3) و (4) نحصل على $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \int_a^b f(x) dx$

• لدينا : $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n + \alpha_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \int_a^b f(x) dx$ ومنه $S_n = (\alpha_n + \alpha_n)$

• خلاصة : $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \int_a^b f(x) dx$

✓ ندرس حالة f تناقصية : بنفس الطريقة نبين أن :

مبرهنة 2 :

دالة متصلة و موجبة و رتيبة على $[a,b]$. حيث :

$$\cdot S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} f(x_{k+1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{k=n} f\left(a+k \times \frac{b-a}{n}\right) \text{ و } \alpha_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} f(x_k) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(a+k \times \frac{b-a}{n}\right)$$

وإذا كانت : f قابلة للاشتقاق على $[a,b]$ و دالتها المشتقة ' f' محدودة على $[a,b]$ (أي $|f'(x)| \leq A$ ، $\forall x \in [a,b]$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \int_a^b f(x) dx$$

مثال :



• $u_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k=n} \frac{i}{n^2}$ نعتبر المتالية :

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

• جواب:

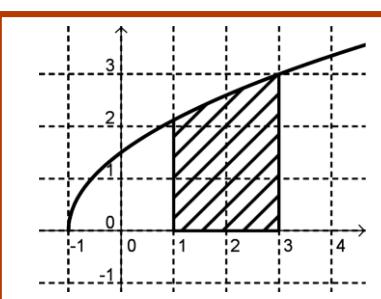
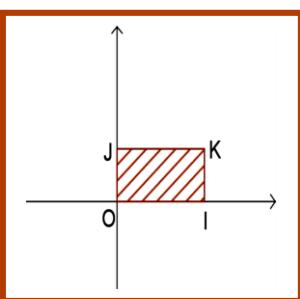
$$u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n^2} = u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{i}{n} = \frac{1-0}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \left(0 + k \times \frac{1-0}{n} \right) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \left(a + k \times \frac{b-a}{n} \right) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{k=n} f(x_k)$$

$$\cdot f(x) = x \text{ أي } f(x_k) = x_k = a + k \times \frac{b-a}{n} \text{ و } b=1 \text{ و } a=0 :$$

• الدالة f متصلة و موجبة و تزايدية على $[0,1]$. ومنه:

$$\cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$$

02. حساب المساحات:



• في هذه الفقرة نأخذ المستوى (P) منسوب إلى معلم معتمد $(0, i, j)$

• دالة متصلة على قطعة $[a, b]$

• ملحوظة: وحدة قياس المساحات هي مساحة المستطيل

• ونرمز لها بالرمز $u.a$ ($u.a = \text{unité aire}$)

• لنتعتبر (F) الحيز من المستوى (P) المحصور بين المنحنى (C_f) و محور الأفاسيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي $a = x = b$.

• لنتعتبر A مساحة الحيز (F) من المستوى (P)

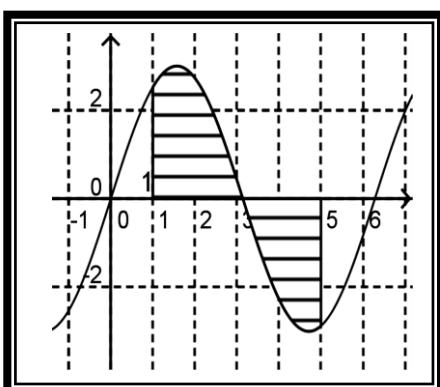
• ملحوظة: المساحة تحسب بالتكامل و مرتبطة بإشارة الدالة f على $[a, b]$

المساحة بوحدة المساحة ونرمز لها ب $u.a$ (ملحوظة إذا كان $f(x) \geq 0$ يجب ضرب التكامل A في 2,5 و منه المساحة $S = 2,5 \times A \text{ cm}^2$ هي :

$[a, b] f$ إشارتها تتغير على

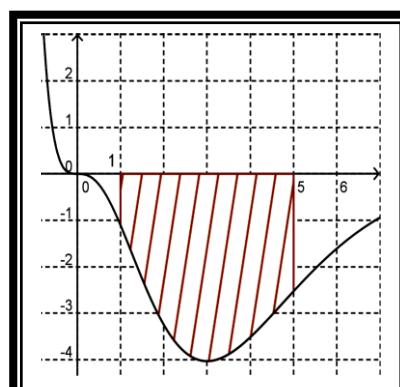
$[a, b] f$ سالبة على

$[a, b] f$ موجبة على



$$A = \int_a^b |f(x)| dx$$

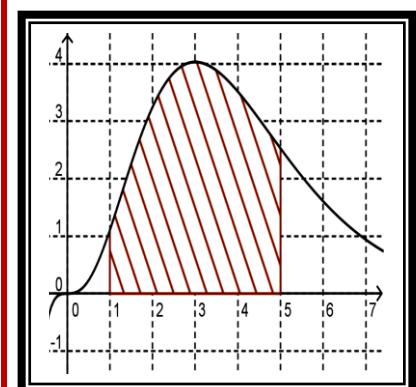
$$A = \int_1^5 |f(x)| dx = \int_1^3 f(x) dx + \int_3^5 f(x) dx$$



$$A = - \int_a^b f(x) dx$$

• ملحوظة: المساحة هي

$$A = - \int_1^5 f(x) dx = \int_5^1 f(x) dx$$

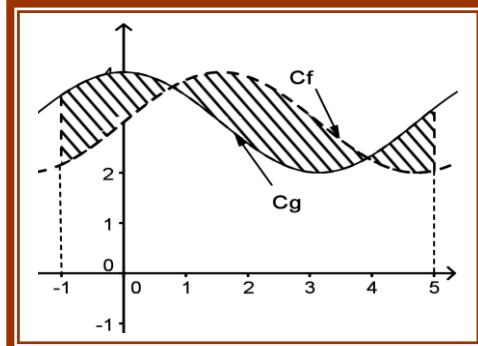


$$A = \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_1^5 f(x) dx$$



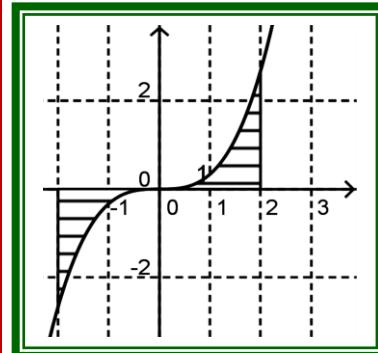
لنتعتبر Δ مساحة الحيز الحصوري (C_f) و (C_g)
و المستقيمين اللذين معادلتيهما هما $x=a$ و $x=b$



$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

$$A = \int_{-1}^5 |f(x) - g(x)| dx = - \int_{-1}^1 (f(x) - g(x)) dx + \int_1^4 (f(x) - g(x)) dx - \int_4^5 (f(x) - g(x)) dx$$

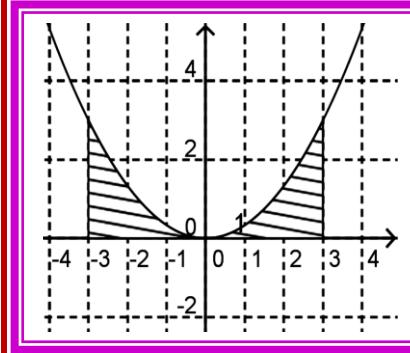
دالة فردية و متصلة على قطعة $[-a, a]$



$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_0^a f(x) dx$$

دالة زوجية و متصلة على قطعة $[0, a]$ و f موجبة على $[-a, a]$



$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

ملاحظة:

إذا كان $1u.a = 2,5\text{cm}^2$ يجب ضرب التكامل A في 2,5 ومنه المساحة هي :

03. حساب الحجم:

A. حجم لجزء مجسم المحصور بين مستويين $(P_1) : z = a$ و $(P_2) : z = b$

في هذه الفقرة نعتبر: الفضاء منسوب إلى معلم متعمد $(0, i, j, k)$

لنتعتبر في الفضاء مجسم (S) محصور بين مستويين

(P_1) و (P_2) محددين بالمعادلتين $z = a$ و $z = b$ حيث $a < b$.

لنتعتبر المستوى (S_t) الذي معادلته الديكارتية هي $t \in [a, b]$ حيث $(S_t) : z = t$

ليكن $(S) \cap (S_t) = F_t$ الشكل المحصل عليه لتقاطع المجسم (S) و المستوى (S_t) .

نعتبر $(t) \rightarrow F_t$ مساحة الشكل F_t .

1. خاصية :

الفضاء منسوب إلى معلم متعمد منظم $(0, i, j, k)$.

$$: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$t \mapsto F_t$$

إذا كانت الدالة $t \rightarrow F_t$ متصلة على $[a, b]$ فإن حجم المجسم (S) هو :

مع العلم أن وحدة قياس الحجم هي $\|i\| \times \|j\| \times \|k\|$



B. حجم المجسم المولد بدوران منحني الدالة f حول محور الأفاسيل :

f دالة متصلة على القطعة $[a, b]$ مع $(a < b)$.

ليكن (C_f) منحناها في المعلم $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

نفترض أن المنحنى (C_f) قام بدورة كاملة حول محور الأفاسيل فإنه يواد مجسم الدوران للدالة f على $[a, b]$.

خاصية:

الفضاء منسوب إلى معلم متعمد مننظم $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. f دالة متصلة على القطعة $[a, b]$ مع $(a < b)$.

حجم المجسم المولد بدوران منحني الدالة f حول محور الأفاسيل هو: $V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx$ بوحدة قياس الحجم $v.u.v$

2. أمثلة :

الفضاء منسوب إلى م.م.م $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) = 1\text{cm}$:

- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[-1, 2]$ بـ:

ليكن (C_f) منحناها في المعلم $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

(1) أنشئ المجسم على الرسم

(2) حسب V حجم مجسم المولد بدوران (C_f) حول محور الأفاسيل على المجال $[-1, 2]$

جواب:

(1) أنظر الرسم الأخير.

(2) حجم مجسم الدوران:

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx = \int_{-1}^2 \pi(f(x))^2 dx = \int_{-1}^2 \pi(x-5)^2 dx = \int_{-1}^2 \pi(x-5)^2 dx = \frac{\pi}{3} [(x-5)^3]_{-1}^2 = \frac{189\pi}{3}$$

مثال 2 :

- الفضاء منسوب إلى م.م.م $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) = 1\text{cm}$:

- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[-1, 1]$ بـ:

ليكن (C_f) منحناها في المعلم $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

(3) أنشئ المجسم على الرسم

(4) حسب V حجم مجسم المولد بدوران (C_f) حول محور الأفاسيل على المجال $[-1, 1]$

جواب:

(1) أنظر الرسم الأخير.

(2) حجم مجسم الدوران:

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx = \int_{-1}^2 \pi(x-5)^2 dx = \int_{-1}^2 \pi(x-5)^2 dx = \frac{\pi}{3} [(x-5)^3]_{-1}^2 = \frac{189\pi}{3}$$

$$\int_a^b \pi(f(x))^2 dx = \int_{-1}^1 \pi(\sqrt{1-x^2})^2 dx = \int_{-1}^1 \pi(1-x^2) dx = \pi \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^1 = \frac{4\pi}{3} \text{ cm}^3$$

طريقة 2: (حجم كرة شعاعها هو $R = 1$).

