

الحل

نعتبر : $z = x + iy$

$$3\bar{z} - 2iz = 1 + 2i \quad \text{أ-}$$

$$3\bar{z} - 2iz = 1 + 2i \Leftrightarrow (3x - 2y) + (-2x - 3y)i = 1 + 2i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ -2x - 3y = 2 \end{cases}$$

$$z = -\frac{1}{13} - \frac{8}{13}i \quad \text{نجد :}$$

$$3\bar{z} + 5iz \in \mathbb{R} \quad \text{ب-}$$

$$3\bar{z} + 5iz \in \mathbb{R} \Leftrightarrow ((3x - 5y) + (5x - 3y)i) \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 5x - 3y = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{5}{3}x$$

$$S = \left\{ x + \frac{5}{3}xi \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

هندسيا الحل هو المستقيم الذي معادلته : $y = \frac{5}{3}x$

$$3\bar{z} + 5iz \in i\mathbb{R} \quad \text{ج-}$$

$$3\bar{z} + 5iz \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow ((3x - 5y) + (5x - 3y)i) \in i\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 3x - 5y = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{3}{5}x$$

$$S = \left\{ x + \frac{3}{5}xi \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

هندسيا الحل هو المستقيم الذي معادلته : $y = \frac{3}{5}x$

$$1 - (1+i)z + iz^2 \in i\mathbb{R} \quad \text{د-}$$

$$1 - (1+i)z + iz^2 \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow (1-x+y-2xy) - i(x+y-x^2+y^2) \in i\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 1-x+y-2xy=0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x-1}{2x-1}; x \neq \frac{1}{2}$$

$$z = x + \left(\frac{x-1}{2x-1} \right)i$$

هندسيا الحل هو الهذلول الذي معادلته : $y = \frac{x-1}{2x-1}$

مركزه : $\Omega\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ مقارباة : $x = \frac{1}{2}$ و $y = \frac{1}{2}$

تذكير :

- المنحنى الممثل للدالة $f(x) = ax^2 + bx + c$ " $a \neq 0$ "

شلجم رأسه $\Omega\left(\frac{-b}{2a}; f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ ومحوره المستقيم $x = \frac{-b}{2a}$

- المنحنى الممثل للدالة

الأعداد العقدية

تمرين 1

حدد الشكل الجبري ل z

$$z = (1-i)^{12} \quad \text{ج-} \quad z = (1-i\sqrt{3})^3 \quad \text{ب-} \quad z = \frac{2-3i}{4+5i} \quad \text{أ-}$$

الحل

ج-

$$\begin{aligned} z &= (1-i)^{12} \\ &= ((1-i)^2)^6 \\ &= (-2i)^6 \end{aligned}$$

$$z = -64$$

تمرين 2

حل في $\mathbb{C}$: أ- $3\bar{z} - 2iz = 1 + 2i$ ب- $3\bar{z} + 5iz \in \mathbb{R}$

ج- $3\bar{z} + 5iz \in i\mathbb{R}$ د- $1 - (1+i)z + iz^2 \in i\mathbb{R}$

$$|z-1|=2|z+1| \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=4(x+1)^2+4y^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+3y^2+10x+3=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{5}{3}\right)^2+y^2=\frac{16}{9}$$

$$E = \mathcal{C}\left(A\left(\frac{5}{3};0\right);\frac{4}{3}\right)$$

ومنه :

$$(z-3+2i)(\bar{z}-3-2i)=25 \quad \text{د-}$$

$$Z_A = 3-2i \quad \text{إذن } A(3;-2) \quad \text{نعتبر :}$$

$$E = \left\{M \in (P) / (z-3+2i)(\bar{z}-3-2i)=25\right\}$$

$$= \left\{M \in (P) / (Z_M - Z_A) = (\overline{Z_M - Z_A})\right\}$$

$$E = \left\{M \in (P) / (Z_M - Z_A)(\overline{Z_M - Z_A})=25\right\}$$

$$= \left\{M \in (P) / |Z_M - Z_A|^2=25\right\}$$

$$= \left\{M \in (P) / |Z_M - Z_A|=5\right\}$$

$$= \left\{M \in (P) / AM=5\right\}$$

$$E = \mathcal{C}(A;5)$$

ومنه :

$$\text{هـ-} \quad \text{Arg} z \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$$

$$E = \left\{M \in (P) / \text{Arg} z \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]\right\} \quad \text{تحديد :}$$

$$\text{نعتبر :} \quad A\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{إذن } \text{Arg} z_A \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$$

$$Z_M = Z \quad \text{لدينا :}$$

$$E = \left\{M \in (P) / \text{Arg} z \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]\right\}$$

$$= \left\{M \in (P) / \text{Arg} Z_M \equiv \text{Arg} Z_A[2\pi]\right\}$$

$$= \left\{M \in (P) / \text{Arg} Z_M - \text{Arg} Z_A \equiv 0[2\pi]\right\}$$

$$= \left\{M \in (P) / \text{Arg} \left(\frac{Z_M}{Z_A}\right) \equiv 0[2\pi]\right\}$$

$$= \left\{M \in (P) / \overline{(\overline{OA}; \overline{OM})} \equiv 0[2\pi]\right\}$$

$$= \left\{M \in (P) / M \in [OA] - \{O\}\right\}$$

$$E = [OA] - \{O\}$$

ومنه :

$$"ad-bc \neq 0 ; x \neq -\frac{d}{c}; c \neq 0" \quad f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$\text{هذلول رأسه } \Omega\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right) \text{ و ومقارباة}$$

$$\text{المستقيم } x = -\frac{d}{c} \text{ و المستقيم } y = \frac{a}{c}$$

تمرين 3

لحق M هو Z : في كل حالة حدد مجموعة النقط E بحيث

$$\text{أ-} \quad |z-2|=|z+3-4i| \quad \text{ب-} \quad |z-3+2i|=2$$

$$\text{ج-} \quad |z-1|=2|z+1| \quad \text{د-} \quad (z-3+2i)(\bar{z}-3-2i)=25$$

$$\text{هـ-} \quad \text{Arg} z \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \quad \text{و-} \quad \text{Arg}(z-2) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$$

$$\text{ز-} \quad \text{Arg} z \equiv \text{Arg}(z+2i)[2\pi]$$

الحل

$$\text{أ- تحديد :} \quad E = \{M \in (P) / |z-3+2i|=2\}$$

$$\text{نعتبر :} \quad A(3;-2) \quad \text{إذن } Z_A = 3-2i$$

$$\text{لدينا :} \quad Z_M = Z$$

$$E = \{M \in (P) / |z-3+2i|=2\}$$

$$= \{M \in (P) / |Z_M - Z_A|=2\}$$

$$= \{M \in (P) / AM=2\}$$

$$E = \mathcal{C}(A;2)$$

ومنه :

$$\text{ب- تحديد :} \quad E = \{M \in (P) / |z-2|=|z+3-4i|\}$$

$$\text{نعتبر :} \quad A(2;0) \quad \text{إذن } Z_A = 2$$

$$\text{و :} \quad B(-3;4) \quad \text{إذن } Z_B = -3+4i$$

$$\text{لدينا :} \quad Z_M = Z$$

$$E = \{M \in (P) / |z-2|=|z+3-4i|\}$$

$$= \{M \in (P) / |Z_M - Z_A|=|Z_M - Z_B|\}$$

$$= \{M \in (P) / AM=BM\}$$

$$E = [AB] \quad \text{واسط}$$

ومنه :

$$\text{ج-} \quad |z-1|=2|z+1|$$

تمرين 4

حدد الشكل المثلثي ل : Z

$$Z = \frac{2+2\sqrt{3}i}{3-3i} \quad \text{أ-}$$

$$\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\quad ; \quad Z = \frac{1+i \tan \theta}{1-i \tan \theta} \quad \text{ب-}$$

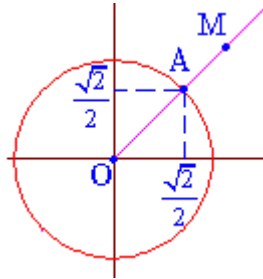
$$Z = \frac{\left[2; \frac{\pi}{3} \right] \left[5; -\frac{\pi}{4} \right]}{\left[1; \frac{\pi}{2} \right]} \quad \text{ج-}$$

الحل

$$Z = \frac{2+2\sqrt{3}i}{3-3i} = \frac{\left[4; \frac{\pi}{3} \right]}{\left[3\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4} \right]} \quad \text{أ-}$$

$$Z = \left[\frac{2\sqrt{2}}{3}; \frac{7\pi}{12} \right]$$

ب-



$$Z = \frac{1+i \tan \theta}{1-i \tan \theta} = \frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta - i \sin \theta}$$

$$Z = \frac{[1; \theta]}{[1; -\theta]}$$

$$Z = [1; 2\theta]$$

$$Z = \frac{\left[2; \frac{\pi}{3} \right] \left[5; -\frac{\pi}{4} \right]}{\left[1; \frac{\pi}{2} \right]}$$

ج-

$$Z = \left[10; -\frac{5\pi}{12} \right]$$

$$\text{و-} \quad \text{Arg}(z-2) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$\text{نعتبر :} \quad \text{Arg} z_A \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \quad \text{إذن} \quad A(1;1)$$

$$\text{و :} \quad Z_B = 2 \quad \text{إذن} \quad B(2;0)$$

$$\text{لدينا :} \quad Z_M = Z$$

$$E = \left\{ M \in (P) / \text{Arg}(z-2) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \right\}$$

$$= \left\{ M \in (P) / \text{Arg}(Z_M - Z_B) \equiv \text{Arg} Z_A [2\pi] \right\}$$

$$= \left\{ M \in (P) / \text{Arg}(Z_M - Z_B) - \text{Arg} Z_A \equiv 0 [2\pi] \right\}$$

$$E = \left\{ M \in (P) / \text{Arg} \left(\frac{Z_M - Z_B}{Z_A - Z_0} \right) \equiv 0 [2\pi] \right\}$$

$$= \left\{ M \in (P) / \overrightarrow{(OA; BM)} \equiv 0 [2\pi] \right\}$$

M تنتمي إلى نصف المستقيم $D(B, \overrightarrow{OA})$ بحيث $M \neq B$

نعتبر : C بحيث : $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$ إذن : $C(3;1)$

$$E = [BC] - \{B\} \quad \text{ومنه :}$$

$$\text{ز-} \quad \text{Arg} z \equiv \text{Arg}(z+2i) [2\pi]$$

$$\text{نعتبر :} \quad Z_B = -2i \quad \text{إذن} \quad A(0; -2)$$

$$\text{لدينا :} \quad Z_M = Z$$

$$E = \left\{ M \in (P) / \text{Arg} z \equiv \text{Arg}(z+2i) [2\pi] \right\}$$

$$= \left\{ M \in (P) / \text{Arg} Z_M \equiv \text{Arg}(Z_M - Z_A) [2\pi] \right\}$$

$$= \left\{ M \in (P) / \text{Arg} \left(\frac{Z_M}{Z_M - Z_A} \right) \equiv 0 [2\pi] \right\}$$

$$E = \left\{ M \in (P) / \overrightarrow{(AM; OM)} \equiv 0 [2\pi] \right\}$$

$$M \in (AO) - [AO]$$

ومنه :

$$E = (AO) - [AO]$$

تمرين 5

$$L(3;4) ; F(2;1) ; A(4;3)$$

اعط قياسا ل : $(\vec{AF}; \vec{AL})$
استنتج : طبيعة المثلث AFL

الحل

$$(\vec{AF}; \vec{AL}) \equiv \text{Arg} \frac{Z_L - Z_A}{Z_F - Z_A} [2\pi]$$

$$\frac{Z_L - Z_A}{Z_F - Z_A} = \frac{-1+i}{-2-2}$$

$$= \frac{\left[\sqrt{2}; \frac{3\pi}{4} \right]}{\left[2\sqrt{2}; \frac{-3\pi}{4} \right]}$$

$$\frac{Z_L - Z_A}{Z_F - Z_A} = \left[\frac{1}{2}; -\frac{\pi}{2} \right]$$

$$(\vec{AF}; \vec{AL}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$$

إذن :

تمرين 6

$C; B; A$ نقط من المستوى العقدي ألقاها

$$Z_C = 3 ; Z_B = 2i ; Z_A = 6 - 2i$$

بين أن : $C; B; A$ نقط مستقيمة

الحل

$$(\vec{CA}; \vec{CB}) \equiv \text{Arg} \frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C} [2\pi]$$

$$\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C} = \frac{-3+2i}{3-2i}$$

$$\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C} = -1$$

$$\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C} \in \mathbb{R}$$

بما أن :

فإن : $C; B; A$ نقط مستقيمة

تمرين 7

$(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ معلم متعامد ممنظم مباشر

$E; F; G$ ثلاثة نقط ألقاها $Z_E = 6 - i2\sqrt{3}$ ، $Z_F = 6$

$$Z_G = -i2\sqrt{3}$$

-1 احسب FG

-2 اعط قياسا ل : $(\vec{e}_1; \vec{OE})$ ، $(\vec{EF}; \vec{EG})$

-3 $\vec{u}(2;2)$ لحقها $\vec{u}$ ، $\vec{v}(0;\sqrt{2})$ لحقها $\vec{v}$

اعط قياسا ل $(\vec{u}; \vec{v})$

الحل

$$GF = 4\sqrt{3}$$

-1

$$(\vec{e}_1; \vec{OE}) \equiv \text{Arg} Z_E [2\pi] \quad -2$$

$$Z_E = \left[4\sqrt{3}; -\frac{\pi}{6} \right]$$

$$(\vec{e}_1; \vec{OE}) \equiv -\frac{\pi}{6} [2\pi]$$

إذن :

$$(\vec{EF}; \vec{EG}) \equiv \text{Arg} \frac{Z_G - Z_E}{Z_F - Z_E} [2\pi]$$

$$\frac{Z_G - Z_E}{Z_F - Z_E} = \sqrt{3}i = \left[\sqrt{3}; \frac{\pi}{2} \right]$$

$$(\vec{EF}; \vec{EG}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

إذن :

$$(\vec{u}; \vec{v}) \equiv \text{Arg} \frac{Z_v}{Z_u} [2\pi] \quad -3$$

$$\frac{Z_v}{Z_u} = \frac{\sqrt{2}}{2+2i} = \left[1; -\frac{\pi}{4} \right]$$

$$(\vec{u}; \vec{v}) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$$

تمرين 8

اكتب بدلالة : $\cos \theta$ و $\sin \theta$ ما يلي :

$$\sin 5\theta \quad -2 \quad \cos 5\theta \quad -1$$

الحل

$$\cos 5\theta + i \sin 5\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^5$$

$$\cos 5\theta = \cos^5 \theta - \cos^3 \theta \sin^2 \theta + \cos \theta \sin^4 \theta$$

$$\sin 5\theta = \cos^4 \theta \sin \theta - \cos^2 \theta \sin^3 \theta + \sin^5 \theta$$

تمرين 9

خطط ما يلي :

$$B = 2^{2n} \cos^{2n} x \quad -2$$

$$A = \cos^8 x \sin x \quad -1$$

الحل

$$A = \cos^7 x \sin^2 x \quad -1$$

$$a = e^{-i\frac{11\pi}{12}}$$

- تحديد الشكل الجبري:

$$a = -\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$$

$$= -\frac{(1+i\sqrt{3})(\sqrt{2}-i\sqrt{2})}{4}$$

$$= -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$$

$$a = \frac{-(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4} + i\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4}$$

$$\cos\frac{-11\pi}{12} = -\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4} \quad \text{ب- من أ:}$$

$$\sin\frac{-11\pi}{12} = \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4}$$

$$\sin\frac{11\pi}{12} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} \quad \text{إذن} \quad \cos\frac{11\pi}{12} = -\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$$

تمرين 11

حدد الشكل المثلثي لحلول المعادلة : $Z^4 = 8(1-i\sqrt{3})$

الحل

أ- تحديد الشكل الأسّي لحلول المعادلة (E)

$$Z^4 = 8(1+i\sqrt{3})$$

$$Z^4 = \left(2e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^4$$

$$\text{أو منه : } Z = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$Z = -2e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$Z = -2ie^{i\frac{\pi}{12}} \quad \text{أو} \quad Z = 2ie^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$Z = 2e^{-i\pi}e^{i\frac{\pi}{12}} \quad \text{أو} \quad Z = 2e^{i\frac{\pi}{12}} \quad \text{إذن : :}$$

$$Z = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{12}} \quad \text{أو} \quad Z = 2e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$Z = 2e^{-i\frac{11\pi}{12}} \quad \text{أو} \quad Z = 2e^{i\frac{\pi}{12}} \quad \text{و منه :}$$

$$Z = 2e^{-i\frac{5\pi}{12}} \quad \text{أو} \quad Z = 2e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

تمرين 12

حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية:

$$5Z^2 - 3Z + 1 = 0 \quad -1$$

$$Z^2 - (3+i)Z + 2 = 0 \quad -2$$

$$iZ^2 - (3-i)Z - 2i = 0 \quad -3$$

$$A = \cos^8 x \sin x$$

$$= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^8 \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)$$

$$= \frac{1}{2^9 i} \sum_{k=0}^8 C_8^k e^{ikx} e^{-i(8-k)x} (e^{ix} - e^{-ix})$$

$$= \frac{1}{2^9 i} \sum_{k=0}^8 C_8^k e^{i(2k-8)x} (e^{ix} - e^{-ix})$$

$$= \frac{1}{2^9 i} \left(\sum_{k=0}^8 C_8^k e^{i(2k-7)x} - \sum_{k=0}^8 C_8^k e^{i(2k-9)x} \right)$$

$$= \frac{2i}{2^9 i} \sum_{k=0}^8 C_8^k \sin((2k-7)x)$$

$$A = \frac{1}{2^8} \sum_{k=0}^8 C_8^k \sin((2k-7)x)$$

$$B = 2^{2n} \cos^{2n} x \quad -2$$

$$B = 2^{2n} \cos^{2n} x$$

$$= 2^{2n} \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^{2n}$$

$$= \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k e^{ikx} e^{-i(2n-k)x}$$

$$= \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k e^{i(2k-2n)x}$$

$$B = \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k e^{i(2k-2n)x} + \sum_{k=n+1}^{2n} C_{2n}^k e^{i(2k-2n)x} + C_{2n}^n$$

نعوض k ب $2n-k$

$$B = \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k e^{i(2k-2n)x} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^{2n-k} e^{-i(2k-2n)x} + C_{2n}^n$$

$$B = \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k \cos(2k-2n) + C_{2n}^n$$

تمرين 10

$$a = -\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$$

أ - حدد الشكل الأسّي والجبري ل

$$\text{ب- استنتج} \quad \sin\frac{11\pi}{12} \quad \text{و} \quad \cos\frac{11\pi}{12}$$

الحل

أ - تحديد الشكل الأسّي :

$$a = -\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$$

$$a = e^{-i\pi} \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

$$= e^{i\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}-\pi}$$

$$\begin{cases} a = -\sqrt{\frac{3\sqrt{5}+3}{2}} \\ b = -\sqrt{\frac{3\sqrt{5}-3}{2}} \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} a = \sqrt{\frac{3\sqrt{5}+3}{2}} \\ b = \sqrt{\frac{3\sqrt{5}-3}{2}} \end{cases} : \text{ ومنه :}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{3\sqrt{5}+3}{2}} + i\sqrt{\frac{3\sqrt{5}-3}{2}} : \text{ إذن :}$$

$$z = \frac{(2-i) + \left(\sqrt{\frac{3\sqrt{5}+3}{2}} + i\sqrt{\frac{3\sqrt{5}-3}{2}} \right)}{2}$$

أو

$$z = \frac{(2-i) - \left(\sqrt{\frac{3\sqrt{5}+3}{2}} + i\sqrt{\frac{3\sqrt{5}-3}{2}} \right)}{2}$$

$$z = \frac{\left(2 + \sqrt{\frac{3\sqrt{5}+3}{2}} \right) + \left(-1 + \sqrt{\frac{3\sqrt{5}-3}{2}} \right) i}{2} : \text{ إذن :}$$

أو

$$z = \frac{\left(2 - \sqrt{\frac{3\sqrt{5}+3}{2}} \right) + \left(-1 - \sqrt{\frac{3\sqrt{5}-3}{2}} \right) i}{2}$$

تمرين 13

$$P(Z) = Z^3 - (16-i)Z^2 + (89-16i)Z + 89i$$

أ- بين أن $P(Z) = 0$ تقبل حلا تخيلا صرفا z_0 يجب تحديده

ب- حل في $\mathbb{C}$: $P(Z) = 0$

الحل

أ- لنبين أن $P(Z) = 0$ تقبل حلا تخيلا صرفا

نعتبر : $z_0 = ib$

$$P(z_0) = 0 \Leftrightarrow (ib)^3 - (16-i)(ib)^2 + (89-16i)ib + 89i = 0$$

$$\Leftrightarrow 16b^2 + 16b + i(-b^3 - b^2 + 89b + 89) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16b^2 + 16b = 0 \\ -b^3 - b^2 + 89b + 89 = 0 \end{cases}$$

$$P(z_0) = 0 \Leftrightarrow b = -1$$

ومنه : $P(Z) = 0$ تقبل حلا تخيلا صرفا $z_0 = -i$

ب- حل المعادلة $P(Z) = 0$ في $\mathbb{C}$:

بما أن : $-i$ جذر لـ $P(Z)$ فإن :

$$P(Z) = (z+i)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

$$Z^2 - (2-i)Z - \frac{5}{2}i = 0 \quad -4$$

الحل

$$5Z^2 - 3Z + 1 = 0 \quad -1$$

$$\Delta' = -11 = (i\sqrt{11})^2$$

$$z = \frac{3 + \sqrt{11}i}{10} \quad \text{أو} \quad z = \frac{3 - \sqrt{11}i}{10}$$

$$S = \left\{ \frac{3 + \sqrt{11}i}{10}; \frac{3 - \sqrt{11}i}{10} \right\}$$

$$Z^2 - (3+i)Z + 2 = 0 \quad -2$$

$$\Delta = 6i = (\sqrt{3}(1+i))^2$$

$$z = \frac{(3+i) + \sqrt{3}(1+i)}{2} \quad \text{أو} \quad z = \frac{(3+i) - \sqrt{3}(1+i)}{2}$$

$$z = \frac{(3+\sqrt{3}) + (1+\sqrt{3})i}{2} \quad \text{أو} \quad z = \frac{(3-\sqrt{3}) + (1-\sqrt{3})i}{2}$$

$$S = \left\{ \frac{(3+\sqrt{3}) + (1+\sqrt{3})i}{2}; \frac{(3-\sqrt{3}) + (1-\sqrt{3})i}{2} \right\}$$

$$iZ^2 - (3-i)Z - 2i = 0 \quad -3$$

$$\Delta = -6i = (\sqrt{3}(1-i))^2$$

$$z = \frac{(3-i) + \sqrt{3}(1-i)}{2i} \quad \text{أو} \quad z = \frac{(3-i) - \sqrt{3}(1-i)}{2i}$$

$$z = \frac{-(1+\sqrt{3}) - (3+\sqrt{3})i}{2} \quad \text{أو} \quad z = \frac{(-1+\sqrt{3}) + (-3+\sqrt{3})i}{2}$$

$$S = \left\{ \frac{-(1+\sqrt{3}) - (3+\sqrt{3})i}{2}; \frac{(-1+\sqrt{3}) + (-3+\sqrt{3})i}{2} \right\}$$

$$Z^2 - (2-i)Z - \frac{5}{2}i = 0 \quad -4$$

$$\Delta = 3+6i$$

نعتبر : $\Delta = \delta^2$; $\delta = a+ib$

إذن : $|\Delta| = |\delta|^2$ ومنه : $a^2 + b^2 = 3\sqrt{5}$

$$3+6i = (a^2 - b^2) + 2abi$$

$$\begin{cases} a^2 = \frac{3\sqrt{5}+3}{2} \\ ab = 3 \\ b^2 = \frac{3\sqrt{5}-3}{2} \end{cases} \quad \text{إذن :} \quad \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ ab = 3 \\ a^2 + b^2 = 3\sqrt{5} \end{cases}$$

$$z \in \left\{ e^{\frac{2k\pi}{n+1}} / k \in \{0;1;\dots;n\} \right\} \cup \{0\}$$

تمرين 15

$Z_A = 7+8i$ حدد الكتابة الجبرية لـ $Z_{A'}$ في كل حالة

أ- A' صورة A بالإزاحة t التي متجهتها $\vec{u}$:

$$Z_{\vec{u}} = -3+10i$$

ب- A' صورة A التحاكي h الذي مركزه Ω ونسبته $\frac{3}{7}$

$$Z_{\Omega} = -3+7i$$

ج- A' صورة A الدوران r الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{3}$

$$Z_{\Omega} = -3+7i$$

الحل

$$t_{\vec{u}}(A) = A' \Leftrightarrow z_{A'} = z_A + z_{\vec{u}}$$

$$\Leftrightarrow z_{A'} = (7+8i) + (-3+10i)$$

$$t_{\vec{u}}(A) = A' \Leftrightarrow z_{A'} = 4+18i$$

$$h_{(\Omega;k)}(A) = A' \Leftrightarrow z_{A'} = kz_A + z_{\Omega}(1-k)$$

$$\Leftrightarrow z_{A'} = \frac{3}{7}(7+8i) + (-3+7i)\left(1-\frac{3}{7}\right)$$

$$h_{(\Omega;k)}(A) = A' \Leftrightarrow z_{A'} = \frac{9}{7} + \frac{52}{7}i$$

$$r(z_A) = z_{A'} \Leftrightarrow z_{A'} = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_A - z_{\Omega}) + z_{\Omega}$$

$$r(z_A) = z_{A'} \Leftrightarrow z_{A'} = e^{i\frac{\pi}{3}}((7+8i) - (-3+7i)) + (-3+7i)$$

$$r(z_A) = z_{A'} \Leftrightarrow z_{A'} = \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{15}{2} + 5\sqrt{3}\right)i$$

تمرين 16

φ تحويل بحيث : $\varphi(z) = z'$

حدد φ في كل حالة

$$z' = 3z - 2 + 5i \quad -2 \quad z' = z - 5 + 2i \quad -1$$

$$z' = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z - 2 + 3i \quad -3$$

$$z' = (\sqrt{3}-i)z + 1 - 3i \quad -4$$

الحل

$$z' = az + b$$

$$z' = z - 5 + 2i \quad -1$$

φ إزاحة متجهتها $\vec{u}(-5+2i)$

$$z' = 3z - 2 + 5i \quad -2$$

$$P(Z) = z^3 + (i+\alpha)z^2 + (\alpha i + \beta)z + \beta i$$

وبما أن :

$$P(Z) = Z^3 - (16-i)Z^2 + (89-16i)Z + 89i$$

$$\beta = 89 \quad \text{و} \quad \alpha = -16$$

$$P(Z) = (z+i)(z^2 - 16z + 89)$$

$$z^2 - 16z + 89 = 0 \quad \text{حل المعادلة :}$$

$$\Delta = -100 \quad \text{نجد :} \quad z = 8-5i \quad \text{أو} \quad z = 8+5i$$

$$\text{ومنه :} \quad z = 8-5i \quad \text{أو} \quad z = 8+5i$$

$$P(Z) = 0 \Leftrightarrow z = -i$$

تمرين 14

حل في $\mathbb{C}$:

$$(E_1) : z^9 + \frac{1}{z^3} = 0 \quad -1$$

$$(E_2) : z^n = \bar{z} ; n \geq 2 \quad -2$$

الحل

$$(E_1) : z^9 + \frac{1}{z^3} = 0 \quad -1$$

لدينا : $z \neq 0$ نعتبر : $z = re^{i\theta}$

$$(E_1) \Leftrightarrow z^9 + \frac{1}{z^3} = 0$$

$$\Leftrightarrow r^9 e^{i9\theta} = \frac{e^{i\pi}}{r^3 e^{-i3\theta}}$$

$$\Leftrightarrow r^{12} e^{i6\theta} = e^{i\pi}$$

$$\Leftrightarrow r^{12} = 1 ; 6\theta \equiv \pi[2k\pi] \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow r = 1 ; \theta = \frac{(2k+1)\pi}{6} \quad k \in \{0,1,2,3,4,5\}$$

$$(E_1) \Leftrightarrow z = e^{\frac{(2k+1)\pi}{6}i} \quad k \in \{0,1,2,3,4,5\}$$

$$z \in \left\{ e^{\frac{2k\pi}{5}} / k \in \{0,1,2,3,4\} \right\}$$

$$(E_2) : z^n = \bar{z} ; n \geq 2 \quad -2$$

لدينا : $z = 0$ تحقق (E_2)

إذا كان : $z \neq 0$ نعتبر : $z = re^{i\theta}$

$$(E_2) \Leftrightarrow z^n = \bar{z}$$

$$\Leftrightarrow r^n e^{in\theta} = re^{-i\theta}$$

$$\Leftrightarrow r^{n-1} e^{i(n+1)\theta} = 1$$

$$\Leftrightarrow r^{n-1} = 1 ; e^{i(n+1)\theta} = 1$$

$$\Leftrightarrow r = 1 ; \theta \equiv \frac{2k\pi}{n+1} \quad k \in \{0;1;\dots;n\}$$

$$(E_2) \Leftrightarrow z = e^{\frac{2k\pi}{n+1}i} \quad k \in \{0;1;\dots;n\}$$

$$1+iy = \sqrt{1+y^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} i \right)$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} ; \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$\tan \theta = y \Leftrightarrow \tan \theta = \tan(\arctan y)$$

إذن :

$$\Leftrightarrow \theta \equiv \arctan y [\pi]$$

ومنه : $\boxed{\text{Arg}(1+iy) \equiv \arctan(y) [\pi]}$

تمرين 19

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$$

1- بين أن : $i \left(\frac{1+z}{1-z} \right) \in \mathbb{R}$; $z \neq 1$

2- بين أن : $\left| \frac{z-z'}{1-zz'} \right| = 1$; $\forall z \in \mathbb{U} - \{1\} ; \forall z' \in \mathbb{C}$; $z \neq z'$

3- بين أن : $\frac{z+z'}{1+zz'} \in \mathbb{R}$; $\forall (z, z') \in \mathbb{U}^2$

4- حدد معيار وعمدة : $z+1$; $z-1$; $z \neq 1$; $z \in \mathbb{U}$

5- استنتج معيار وعمدة : $\frac{z-1}{z+1}$; $z \in \mathbb{U}$; $z \neq 1$; $z \neq -1$

6- حدد معيار وعمدة

$$(z, z') \in \mathbb{U}^2 ; (z \neq z') \quad z - z' ; (z \neq -z') \quad z + z'$$

الحل

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$$

بما أن : $|z| = 1$

فإن : $z \bar{z} = 1$

1- لنبين أن : $i \left(\frac{1+z}{1-z} \right) \in \mathbb{R}$; $z \neq 1$

$$\overline{i \left(\frac{1+z}{1-z} \right)} = -i \left(\frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}} \right)$$

$$= -i \left(\frac{1+\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}} \right)$$

$$= -i \left(\frac{z+1}{z-1} \right)$$

$$\boxed{i \left(\frac{1+z}{1-z} \right)} = i \left(\frac{1+z}{1-z} \right)$$

$$\boxed{i \left(\frac{1+z}{1-z} \right) \in \mathbb{R}}$$

إذن :

φ تحاك مركزه $\Omega(2-5i)$ ونسبته 3

$$z' = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) z - 2 + 3i \quad -3$$

$$\frac{b}{1-a} = \frac{-2+3i}{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i}$$

φ دوران مركزه $\Omega \left(\frac{-2+3i}{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i} \right)$ وقياس زاويته $\frac{2\pi}{3}$

$$z' = (\sqrt{3} - i) z + 1 - 3i \quad -4$$

$$|a| = 2 \quad \frac{b}{1-a} = \frac{1-3i}{(1-\sqrt{3})+i}$$

حيث : $\varphi = r \circ h = h \circ r$

h هو التحاكي الذي مركزه $\Omega \left(\frac{1-3i}{(1-\sqrt{3})+i} \right)$ ونسبته 2

و r هو الدوران الذي مركزه $\Omega \left(\frac{b}{1-a} \right)$ وقياس زاويته $-\frac{\pi}{6}$

تمرين 17

$$\theta \in [0; \pi] ; (E) : z^2 + 2(1-\cos \theta)z + 2(1-\cos \theta) = 0$$

حدد الكتابة الجبرية والأسية ل $z_2 ; z_1$ حلي المعادلة (E)

الحل

$$\theta \in [0; \pi] ; (E) : z^2 + 2(1-\cos \theta)z + 2(1-\cos \theta) = 0$$

$$\Delta' = (1-\cos \theta)^2 - 2(1-\cos \theta)$$

$$\Delta' = -\sin^2 \theta$$

بما أن : $\theta \in [0; \pi]$ فإن : $\sin \theta \geq 0$

إذن : $\Delta' = (i \sin \theta)^2$

$$z_2 = (-1 + \cos \theta) - i \sin \theta ; z_1 = (-1 + \cos \theta) + i \sin \theta$$

$$z_2 = -1 + e^{-i\theta} ; z_1 = -1 + e^{+i\theta}$$

$$z_2 = e^{-i\frac{\theta}{2}} \left(-e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}} \right) ; z_1 = e^{i\frac{\theta}{2}} \left(-e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}} \right)$$

$$z_2 = -2i \sin \theta e^{-i\frac{\theta}{2}} ; z_1 = 2i \sin \theta e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$\boxed{z_2 = 2 \sin \theta e^{\left(-\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} \right) i}}$$

$$\boxed{z_1 = 2 \sin \theta e^{\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} \right) i}}$$

تمرين 18

بين أن : $\text{Arg}(1+iy) \equiv \arctan(y) [\pi]$; $y \in \mathbb{R}$

الحل

نعتبر : $1+iy = re^{i\theta}$

$$\text{إذا كان : } \sin \frac{\theta}{2} < 0 \text{ : فإن : } z+1 = \left(-2 \sin \frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\text{-5 معيار وعمدة : } \frac{z-1}{z+1} \text{ : } z \in \mathbb{U}; (z \neq 1; z \neq -1)$$

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{\left(2i \sin \frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}}{\left(2 \cos \frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}}$$

$$\frac{z-1}{z+1} = i \tan \frac{\theta}{2} e^{i\theta}$$

$$\text{إذا كان : } \tan \frac{\theta}{2} > 0 \text{ : فإن : } \frac{z-1}{z+1} = \tan \frac{\theta}{2} e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\text{إذا كان : } \tan \frac{\theta}{2} < 0 \text{ : فإن : } \frac{z-1}{z+1} = -\tan \frac{\theta}{2} e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right)}$$

-6 حدد معيار وعمدة

$$(z, z') \in \mathbb{U}^2 ; (z \neq z') \quad z - z' ; (z \neq -z') \quad z + z'$$

$$z + z' = e^{i\theta} + e^{i\theta'}$$

$$= e^{i\theta'} \left(e^{i(\theta-\theta')} + 1 \right)$$

$$= e^{i\theta'} 2 \cos \left(\frac{\theta - \theta'}{2} \right) e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}}$$

$$z + z' = 2 \cos \left(\frac{\theta - \theta'}{2} \right) e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$$

$$z - z' = e^{i\theta} - e^{i\theta'}$$

$$= e^{i\theta'} \left(e^{i(\theta-\theta')} - 1 \right)$$

$$= e^{i\theta'} 2i \sin \left(\frac{\theta - \theta'}{2} \right) e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}}$$

$$z - z' = 2i \sin \left(\frac{\theta - \theta'}{2} \right) e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$$

تمرين 20

نعتبر النقطتين $A(i)$ ؛ $A'(-i)$

$$f(z) = \frac{\overline{z}(z-i)}{z+i} \text{ تطبيق من } \mathbb{C} - \{i\} \text{ إلى } \mathbb{C}$$

و F التطبيق من $\mathcal{P} - \{A\}$ نحو $\mathcal{P}$ الذي يربط كل نقطة

$M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ حيث : $f(z) = z'$

1- أ- بين أن إذا كان : $z \neq 0$ و $z' \neq 0$ فإن :

$$\text{-2 لنبين أن : } \left| \frac{z-z'}{1-zz'} \right| = 1 ; \forall z \in \mathbb{U} - \{1\} ; \forall z' \in \mathbb{C} ; z \neq z'$$

$$\left| \frac{z-z'}{1-zz'} \right| = \left| \frac{z-z'}{1-\frac{1}{z}z'} \right|$$

$$= |z| \left| \frac{z-z'}{z-z'} \right|$$

$$\left| \frac{z-z'}{1-zz'} \right| = |z|$$

$$\left| \frac{z-z'}{1-zz'} \right| = 1$$

إن :

$$\text{-3 لنبين أن : } \frac{z+z'}{1+zz'} \in \mathbb{R} ; (z, z') \in \mathbb{U}^2$$

$$\overline{\left(\frac{z+z'}{1+zz'} \right)} = \frac{\overline{z} + \overline{z'}}{\overline{1+zz'}} = \frac{\frac{1}{z} + \frac{1}{z'}}{1 - \frac{1}{zz'}} = \frac{z+z'}{1+zz'}$$

$$\frac{z+z'}{1+zz'} \in \mathbb{R}$$

إن :

$$\text{-4 تحديد معيار وعمدة : } z \in \mathbb{U}; (z \neq 1) \quad z-1; (z \neq -1) \quad z+1$$

نعتبر : $z = e^{i\theta}$

$$z+1 = e^{i\theta} + 1$$

$$= e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}} \right)$$

$$z+1 = \left(2 \cos \frac{\theta}{2} \right) e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$\text{إذا كان : } \cos \frac{\theta}{2} > 0 \text{ : فإن : } z+1 = \left(2 \cos \frac{\theta}{2} \right) e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$\text{إذا كان : } \cos \frac{\theta}{2} < 0 \text{ : فإن : } z+1 = \left(-2 \cos \frac{\theta}{2} \right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)}$$

$$z-1 = e^{i\theta} - 1$$

$$= e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}} \right)$$

$$z-1 = \left(2i \sin \frac{\theta}{2} \right) e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$\text{إذا كان : } \sin \frac{\theta}{2} > 0 \text{ : فإن : } z+1 = \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\bar{z}(z-i)}{z+i} \\ &= \frac{1-i\bar{z}}{z+i} \\ &= \frac{i(-i-\bar{z})}{z+i} \end{aligned}$$

$$f(z) = -i$$

2- أ - تحديد مجموعة النقط الصامدة بالتطبيق F
 $z \in \mathbb{C} - \{i\}$

$$\begin{aligned} f(z) = z &\Leftrightarrow \frac{\bar{z}(z-i)}{z+i} = z \\ &\Leftrightarrow \bar{z}z - i\bar{z} = \bar{z}z + iz \\ &\Leftrightarrow -i(\bar{z} + z) = 0 \\ &\Leftrightarrow -i2\operatorname{Re}(z) = 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0 \end{aligned}$$

$$f(z) = z \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$$

مجموعة النقط الصامدة بالتطبيق F هو محور الأرتاب محروم من النقطة A

ب- تحديد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث تكون $f(z)$ على شكل ai ($a \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} f(z) \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow f(z) + \overline{f(z)} = 0 \\ \frac{\bar{z}(z-i)}{(z-i)} + \overline{\left(\frac{\bar{z}(z-i)}{(z-i)}\right)} &= \frac{\bar{z}(z-i)}{(z-i)} + \frac{z(\bar{z}-i)}{(\bar{z}-i)} \\ &= \frac{\bar{z}(z-i)^2 + z(\bar{z}-i)^2}{(z-i)(\bar{z}-i)} \\ &= \frac{\bar{z}z^2 - 2\bar{z}zi - \bar{z} + z\bar{z}^2 + 2\bar{z}zi - z}{(z-i)(\bar{z}-i)} \\ &= \frac{z\bar{z}(z+\bar{z}) - (\bar{z} + z)}{(z-i)(\bar{z}-i)} \\ &= \frac{(z+\bar{z})(|z|^2 - 1)}{(z-i)(\bar{z}-i)} \end{aligned}$$

$$f(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow (z+\bar{z})(|z|^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = -\bar{z} \text{ ou } |z| = 1 \quad \text{إذن :}$$

$$\Leftrightarrow z \in i\mathbb{R} \text{ ou } |z| = 1$$

مجموعة النقط $M(z)$ بحيث تكون $f(z)$ على

شكل ai ($a \in \mathbb{R}$) هو محور الأرتاب محروم من النقطة A

$$(z \neq 0; z' \neq 0); |z| = |z'|$$

$$\arg(z') \equiv -\arg(z) + 2\arg(z-i) [2\pi] \text{ و}$$

(لاحظ أن : $\overline{z-i} = \bar{z} + i$)

ب- بين أن إذا كان : $|z| = 1$ فإن : $f(z) = -i$

2- أ - حدد مجموعة النقط الصامدة بالتطبيق F

ب- حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث تكون $f(z)$ على

شكل ai ($a \in \mathbb{R}$)

3- أ- بين أن :

$$z' - z = \frac{-i(z+\bar{z})}{|z+i|^2}(z-i) \text{ و } z' + i = \frac{z\bar{z}-1}{|z+i|^2}(z-i)$$

ب- استنتج أن المتجهين : $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{A'M'}$ مستقيمان

و أن $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{MM'}$ متعامدان

ج- أعط طريقة للإنشاء الهندسي لصورة M بالتطبيق F

الحل
 1- أ

$$\begin{aligned} \frac{\bar{z}(z-i)}{z+i} &= \frac{\bar{z}(z-i)}{(z-i)} \\ |z'|^2 &= \frac{\bar{z}(z-i)}{(z-i)} \times \overline{\left(\frac{\bar{z}(z-i)}{(z-i)}\right)} \\ &= \frac{\bar{z}(z-i)}{(z-i)} \times \frac{z(\bar{z}-i)}{(\bar{z}-i)} \\ &= \bar{z}z \\ |z'|^2 &= |z|^2 \end{aligned}$$

$$|z'| = |z|$$

إذن :

و

$$\begin{aligned} \arg(z') &\equiv \arg\left(\frac{\bar{z}(z-i)}{(z-i)}\right) [2\pi] \\ &\equiv \arg(\bar{z}) + \arg(z-i) - \arg(\bar{z}-i) [2\pi] \\ &\equiv -\arg(z) + \arg(z-i) + \arg(z-i) [2\pi] \\ \arg(z') &\equiv -\arg(z) + 2\arg(z-i) [2\pi] \end{aligned}$$

ب- لنبين أن إذا كان : $|z| = 1$ فإن : $f(z) = -i$

$$|z| = 1 \Leftrightarrow z = \frac{1}{\bar{z}}$$

$$\frac{-(z + \bar{z})}{|\bar{z} + i|^2} \in \mathbb{R}^* : \text{بما أن}$$

$$\arg\left(\frac{-i(z + \bar{z})}{|\bar{z} + i|^2}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] : \text{فإن}$$

إذن : $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{MM'}$ متعامدتان

ج- طريقة للإنشاء الهندسي لصورة M بالتطبيق F

لدينا : $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{A'M'}$ مستقيمتان

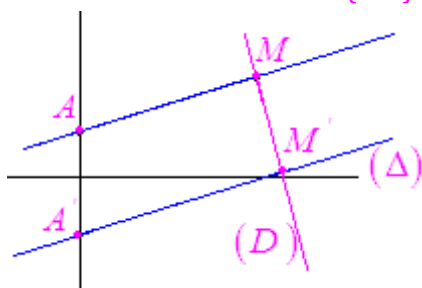
نأخذ نقطة M من $\mathcal{P} - \{A\}$

نرسم المستقيم (Δ) الموازي ل (AM) المار من A'

لدينا : $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{MM'}$ متعامدتان

نرسم المستقيم (D) العمودي على (AM) المار من M

$$(\Delta) \cap (D) = \{M'\}$$



تمرين 21

نعتبر : $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$

$C; B; A$ نقط من المستوى العقدي أحاقها

$$c = 8j^2 ; b = 6j ; a = 8$$

لتكن : A' صورة B بالدوران $R\left(c, \frac{\pi}{3}\right)$

B' صورة C بالدوران $R\left(A, \frac{\pi}{3}\right)$

C' صورة A بالدوران $R\left(B, \frac{\pi}{3}\right)$

1- حدد : $a' ; b' ; c'$ ألحاق $C; B; A$

استنتج أن : $O \in (BB')$

2- بين أن المستقيمات : $(AA') \cap (BB') \cap (CC') = \{O\}$

3- أ- احسب : $OA + OB + OC$

ب- بين أن : $j^3 = 1$ و $j^2 = \bar{j}$ و $1 + j + j^2 = 0$

ج- M النقطة التي لحقها z ، تحقق أن :

$$|(a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)j| = |a + bj^2 + cj| = 22$$

د- بين أن المسافة $MA + MB + MC$ تكون دنوية إذا كان

$$M = O$$

الحل

اتحاد الدائرة المثلثية محرومة من النقطة A

$$3- \text{أ- لنبين أن : } z' + i = \frac{z\bar{z} - 1}{|\bar{z} + i|^2}(z - i)$$

$$\begin{aligned} z' + i &= \frac{\bar{z}(z - i)}{\bar{z} + i} + i \\ &= \frac{\bar{z}(z - i) + (\bar{z} + i)i}{\bar{z} + i} \\ &= \frac{(\bar{z}z - \bar{z}i) + (\bar{z}i - 1)}{(\bar{z} + i)(z - i)}(z - i) \end{aligned}$$

$$z' + i = \frac{z\bar{z} - 1}{|\bar{z} + i|^2}(z - i)$$

$$\text{لنبين أن : } z' - z = \frac{-i(z + \bar{z})}{|\bar{z} + i|^2}(z - i)$$

$$\begin{aligned} z' - z &= \frac{\bar{z}(z - i)}{\bar{z} + i} - z \\ &= \frac{\bar{z}(z - i) - (\bar{z} + i)z}{\bar{z} + i} \\ &= \frac{(\bar{z}z - \bar{z}i) - (\bar{z}z + iz)}{(\bar{z} + i)(z - i)}(z - i) \end{aligned}$$

$$z' - z = \frac{-i(z + \bar{z})}{|\bar{z} + i|^2}(z - i)$$

ب- نستنتج أن المتجهين : $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{A'M'}$ مستقيمتان

$$\text{لدينا : } z' + i = \frac{z\bar{z} - 1}{|\bar{z} + i|^2}(z - i) \Leftrightarrow \frac{z' + i}{z - i} = \frac{z\bar{z} - 1}{|\bar{z} + i|^2}$$

$$\frac{z\bar{z} - 1}{|\bar{z} + i|^2} \in \mathbb{R} : \text{بما أن}$$

فإن : المتجهين : $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{A'M'}$ مستقيمتان

نستنتج أن المتجهين : $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{MM'}$ متعامدتان

إذا كان : $z = 0$ فإن : $M = M' = O$

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{O} \text{ و } \overrightarrow{AM} = \vec{AO}$$

إذن : $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{MM'}$ متعامدتان

نفترض أن : $z \neq 0$

$$\text{لدينا : } z' - z = \frac{-i(z + \bar{z})}{|\bar{z} + i|^2}(z - i) \Leftrightarrow \frac{z' - z}{z - i} = \frac{-i(z + \bar{z})}{|\bar{z} + i|^2}$$

-1

$$R_{\left(c, \frac{\pi}{3}\right)}(B) = A' \Leftrightarrow a' = e^{i\frac{\pi}{3}} \left(6e^{2i\frac{\pi}{3}} - 8e^{4i\frac{\pi}{3}} \right) + 8e^{4i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow a' = -6 - 8e^{-i\frac{\pi}{3}} + 8e^{-2i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow a' = -6 - 8 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) + 8 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

$$R_{\left(c, \frac{\pi}{3}\right)}(B) = A \Leftrightarrow a' = -14$$

$$R_{\left(A, \frac{\pi}{3}\right)}(C) = B' \Leftrightarrow b' = e^{i\frac{\pi}{3}} \left(8e^{4i\frac{\pi}{3}} - 8 \right) + 8$$

$$\Leftrightarrow b' = 8e^{-i\frac{\pi}{3}} - 8e^{i\frac{\pi}{3}} + 8$$

$$\Leftrightarrow b' = 8 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) - 8 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) + 8$$

$$\Leftrightarrow b' = 8 - 8\sqrt{3}i$$

$$R_{\left(A, \frac{\pi}{3}\right)}(C) = B' \Leftrightarrow b' = 16e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$R_{\left(B, \frac{\pi}{3}\right)}(A) = C' \Leftrightarrow c' = e^{i\frac{\pi}{3}} \left(8 - 6e^{2i\frac{\pi}{3}} \right) + 6e^{2i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow c' = 8e^{i\frac{\pi}{3}} + 6 + 6e^{2i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow c' = 6 + 8 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) + 6 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

$$\Leftrightarrow c' = 7 + 7\sqrt{3}i$$

$$R_{\left(B, \frac{\pi}{3}\right)}(A) = C' \Leftrightarrow c' = 14e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$b = 6j \quad \text{و} \quad b' = 16e^{-i\frac{\pi}{3}} \quad \text{لدينا :}$$

$$\frac{b'}{b} = \frac{16e^{-i\frac{\pi}{3}}}{6e^{i2\frac{\pi}{3}}}$$

إذن :

$$\frac{b'}{b} = -\frac{16}{6}$$

$$\frac{b'}{b} \in \mathbb{R} \quad \text{و منه :}$$

$$O \in (BB')$$

$$O \in (AA')$$

$$\text{و} \quad O \in (CC') \quad \text{بنفس الطريقة نجد :}$$

-2

$$O \in (AA') \quad \text{و} \quad O \in (BB') \quad \text{و} \quad O \in (CC') : \text{بما أن}$$

$$(AA') \cap (BB') \cap (CC') = \{O\} \quad \text{فإن :}$$

$$OA + OB + OC = 22$$

-3 أ -

$$j^3 = \left(e^{2i\frac{\pi}{3}} \right)^3 = 1$$

ب -

$$j^2 = \left(e^{2i\frac{\pi}{3}} \right)^2 = e^{4i\frac{\pi}{3}} = e^{-2i\frac{\pi}{3}} = \bar{j}$$

$$1 + j + \bar{j} = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

$$1 + j + j^2 = 0$$

-ج

$$\begin{aligned} |(a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)j| &= |a + bj^2 + cj - z(1+j+j^2)| \\ &= |a + bj^2 + cj| \\ &= |8 + 6j^3 + 8j^3| \\ &= 22 \end{aligned}$$

$$\text{إذن : } |(a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)j| = |a + bj + cj^2| = 22$$

د- لنبين أن المسافة $MA + MB + MC$ تكون دنوية إذا كان $M = O$

$$\text{لدينا : } OA + OB + OC = 22$$

$$\text{و} \quad |(a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)j| = |a + bj + cj^2| = 22$$

$$\text{إذن : } |(a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)j| = OA + OB + OC$$

$$\text{لدينا : } |(a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)j| \leq |a-z| + |b-z| + |c-z|$$

$$\text{إذن : } OA + OB + OC \leq MA + MB + MC$$

و منه : المسافة $MA + MB + MC$ تكون دنوية إذا كان $M = O$