

الأعداد العقدية

1. تقديم و تعاريف :

- ❖ توجد مجموعة يرمز لها ب $\mathbb{C}$ و تسمى مجموعة الأعداد العقدية و تحقق $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ و هي تحتوي على عدد نرمز له ب i حيث $i^2 = -1$
- ❖ كل عدد z من $\mathbb{C}$ يكتب على شكل $z = a + ib$ مع $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
- ❖ العدد a يسمى الجزء الحقيقي و نرمز له ب $\Re(z)$
- ❖ العدد b يسمى الجزء التخيلي و نرمز له ب $\Im(z)$
- ❖ الكتابة $z = a + ib$ مع $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ تسمى الشكل الجبري للعدد العقدي z
- ❖ إذا كان $z = ib$ حيث $b \in \mathbb{R}$ نقول أن z تخيلي صرف و نكتب $z \in i\mathbb{R}$

2. خاصيات :

- ليكن $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ لدينا :
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Im(z) = 0$
 - $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \Re(z) = 0$
 - $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \Re(z) = \Re(z') \\ \Im(z) = \Im(z') \end{cases}$
 - $z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Re(z) = 0 \\ \Im(z) = 0 \end{cases}$

العمليات في $\mathbb{C}$

- ليكن $z = a + ib$ و $z' = a' + ib'$
- $z + z' = (a + a') + i(b + b')$
 - $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$
 - $-z = -a - ib$
 - $\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$
 - جميع خصائص الجداء و الجمع في $\mathbb{R}$ تبقى صالحة في $\mathbb{C}$
 - $(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$

$$\begin{aligned} (a-ib)^2 &= a^2 - b^2 - 2abi \\ (a-ib)(a+ib) &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

3. مرافق عدد عقدي

تعريف :

مرافق العدد العقدي $z = a + ib$ مع $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ هو العدد العقدي $\bar{z} = a - ib$

خاصيات المرافق

ليكن z_1 و z_2 عددين عقديين

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad \checkmark$$

$$\overline{z_1 \times z_2} = \bar{z}_1 \times \bar{z}_2 \quad \checkmark$$

$$(z_1 \neq 0) \quad \frac{1}{z_1} = \frac{1}{\bar{z}_1} \quad \checkmark$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad \checkmark$$

$$z \in \mathbb{C} \text{ و } n \in \mathbb{Z} \text{ حيث } \overline{z^n} = \bar{z}^n \quad \checkmark$$

نتائج :

$$z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) \quad \bullet$$

$$z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z) \quad \bullet$$

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z} \quad \bullet$$

$$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\bar{z} \quad \bullet$$

4. معيار عدد عقدي :

معيار العدد العقدي $z = a + ib$ مع $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ هو العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له بـ $|z|$ و هو معرف بما يلي :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

خاصيات :

ليكن z و z' عددين عقديين

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} \quad \checkmark$$

$$|z \times z'| = |z| \times |z'| \quad \checkmark$$

$$(z \neq 0) \quad \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} (z' \neq 0) \quad \left| \frac{z}{z'} \right| &= \frac{|z|}{|z'|} \quad \checkmark \\ n \in \mathbb{Z} \quad |z^n| &= |z|^n \quad \checkmark \\ |z + z'| &\leq |z| + |z'| \quad \checkmark \end{aligned}$$

5. الشكل المثلثي لعدد عقدي غير منعدم :

أ. عمدة عدد عقدي غير منعدم :

ليكن $z = x + iy$ من $\mathbb{C}^*$ حيث x و y من $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{كل عدد حقيقي } \theta \text{ بحيث : } \begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{|z|} \\ \sin \theta = \frac{y}{|z|} \end{cases} \text{ يسمى عمدة لـ } z \text{ و نكتب : } \arg(z) = \theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{أو } \arg(z) \equiv \theta [2\pi] \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

ب. خاصيات العمدة :

ليكن z_1 و z_2 عددين عقديين غير منعدمين

$$\begin{aligned} \arg(\overline{z_1}) &\equiv -\arg(z_1) [2\pi] \quad \checkmark \\ \arg(z_1 \times z_2) &\equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) [2\pi] \quad \checkmark \\ \arg\left(\frac{1}{z_1}\right) &\equiv -\arg(z_1) [2\pi] \quad \checkmark \\ \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &\equiv \arg(z_1) - \arg(z_2) [2\pi] \quad \checkmark \\ n \in \mathbb{Z} \quad \arg(z_1^n) &\equiv n \arg(z_1) [2\pi] \quad \checkmark \end{aligned}$$

6. الشكل المثلثي لعدد عقدي غير منعدم :

تعريف :

كل عدد عقدي z غير منعدم يكتب على شكل $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ حيث $|z| = r$ و $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$

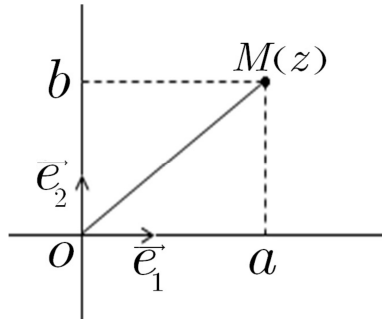
خصائص الشكل المثلثي :

- $\overline{r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))} = r(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$
- $r(\cos \theta + i \sin \theta) \times r'(\cos \theta' + i \sin \theta') = rr'(\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta'))$
- $\frac{1}{r(\cos \theta + i \sin \theta)} = \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$
- $\frac{r(\cos \theta + i \sin \theta)}{r'(\cos \theta' + i \sin \theta')} = \frac{r}{r'}(\cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta'))$
- $(r(\cos \theta + i \sin \theta))^n = r^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$ حيث $n \in \mathbb{Z}$ (علاقة موافر)

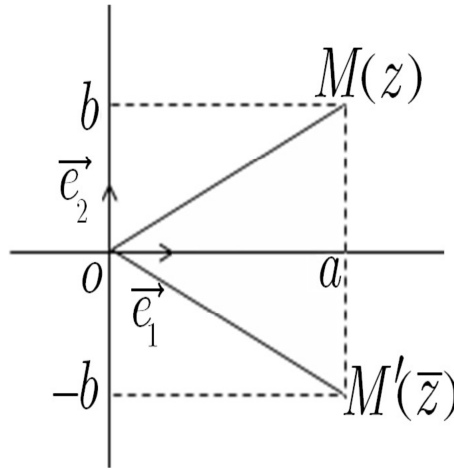
7. تأويلات هندسية للأعداد العقدية :

تعريف:

- في المستوى (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$
- لتكن النقطة $M(a, b)$
- العدد العقدي $z = a + ib$ يسمى لحق النقطة M
 - النقطة $M(a, b)$ تسمى صورة العدد $z = a + ib$ حيث $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

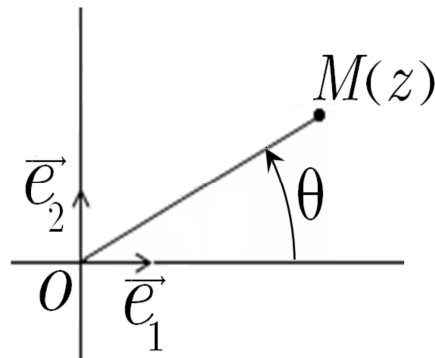


• مرافق $z = a + ib$ هو $\bar{z} = a - ib$

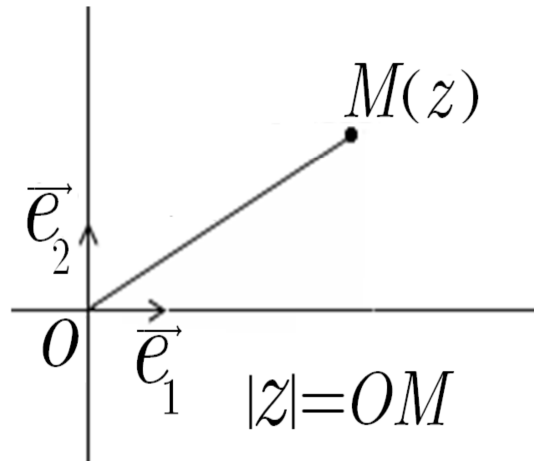


- لدينا كذلك $z = a + ib$ هو لحق المتجهة $\vec{U}(a, b)$
- المستوى (P) يسمى المستوى العقدي
- $(O, \vec{e}_1)$ يسمى المحور الحقيقي
- $(O, \vec{e}_2)$ يسمى المحور التخيلي
- $\overrightarrow{OM} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ ونكتب $z_M = a + ib$ أو $\text{aff}(M) = a + ib$

❖ ليكن $z = a + ib$ لحق النقطة M من المستوى العقدي لدينا : $\arg(z) \equiv (\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}) [2\pi]$



❖ المسافة $OM = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$:



المسافة AB :

لتكن A و B نقطتان لحقاهما على التوالي z_A و z_B

لدينا : $AB = |z_B - z_A|$

خاصيات :

لتكن A و B نقطتان لحقاهما على التوالي z_A و z_B

و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتان من المستوى العقدي (P) :

- لحق المتجهة $\overline{AB}$ هو : $z_B - z_A$
- لحق المتجهة $\vec{u} + \vec{v}$ هو : $z_{\vec{u} + \vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}$
- لحق النقطة I منتصف القطعة $[AB]$ هو : $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$
- $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow z_{\vec{u}} = z_{\vec{v}}$
- M نقطة لدينا :
- $\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} \Leftrightarrow z_M = z_A + z_B$
- $\overline{OM} = \alpha \cdot \overline{OA} \Leftrightarrow z_M = \alpha \cdot z_A$

• لتكن $A(z_A)$ و $B(z_B)$ و $C(z_C)$ و $D(z_D)$ نقط مختلفة متمشى

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow A, B, C \text{ مستقيمة} \quad \triangleright$$

$$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (AB) \parallel (DC) \quad \triangleright$$

$$\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow$$

$$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow (AB) \perp (DC) \quad \triangleright$$

$$\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow$$

$$\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_B - z_C}{z_D - z_C} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow A, B, C, D \text{ متداورة} \quad \triangleright$$

قياس الزوايا :

لتكن $A(z_A)$ و $B(z_B)$ و $C(z_C)$ و $D(z_D)$

$$O \neq A \quad \text{حيث} \left(\overline{e_1}, \overline{OA}\right) \equiv \arg(z_A)[2\pi] \quad \bullet$$

$$A \neq B \quad \text{حيث} \left(\overline{e_1}, \overline{AB}\right) \equiv \arg(z_B - z_A)[2\pi] \quad \bullet$$

$$A \neq C \quad \text{و} \quad A \neq B \quad \text{حيث} \left(\overline{AB}, \overline{AC}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)[2\pi] \quad \bullet$$

$$\left(\overline{AB}, \overline{DC}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_D}{z_B - z_A}\right)[2\pi] \quad \bullet$$

حيث $A \neq B$ و $C \neq D$

8. الشكل الأسّي لعدد عقدي :

تعريف :

كل عدد عقدي غير منعدم يكتب على شكله الأسّي ب: $z = re^{i\theta}$
حيث $|z| = r$ و $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$

خاصيات :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad \checkmark$$

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \quad \checkmark$$

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \quad \checkmark$$

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \quad \checkmark$$

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')} \quad \checkmark$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \quad \checkmark$$

صيغ أولير

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

9. الجزور النونية لعدد عقدي غير منعدم

❖ ليكن Z من $\mathbb{C}$ و n من $\mathbb{N}^* - \{1\}$

نسمى الجذر النوني للعدد Z أو الجذر من الرتبة n للعدد Z كل عدد عقدي z يحقق $z^n = Z$

❖ ليكن $Z = re^{i\theta}$ ($r > 0$)

العدد Z يقبل n جذر نوني و هذه الجذور النونية تكتب على شكل : $z_k = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$ بحيث $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

❖ صور الجذور النونية للعدد Z تكون مضلعا منتظما ذو n ضلع محاطا بالدائرة التي مركزها O وشعاعها $\sqrt[n]{r}$

❖ الجذور النونية للعدد 1 هي الأعداد : $w_k = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}$ بحيث $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ وتسمى الجذور من الرتبة n للوحدة

❖ ليكن Z من $\mathbb{C}^*$ و a أحد الجذور النونية للعدد Z
نحصل على الجذور النونية للعدد Z بضرب a في الجذور النونية للوحدة

10. الجذور المربعة لعدد عقدي غير منعدم

أ. الطريقة المثلثية :

ليكن $Z = re^{i\theta}$ ($r > 0$)

الجذران المربعان للعدد Z هما : $\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}$ و $-\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}$

ب. الطريقة الجبرية :

(1) إذا كان $Z \in \mathbb{R}_+$: $\sqrt{Z}$ و $-\sqrt{Z}$ هما الجذران المربعان للعدد Z

(2) إذا كان $Z \in \mathbb{R}_-$: $i\sqrt{-Z}$ و $-i\sqrt{-Z}$ هما الجذران المربعان للعدد Z

(3) إذا كان $Z \in i\mathbb{R}_+$ ($b \in \mathbb{R}_+$) : $Z = ib$: $(1+i)\sqrt{\frac{b}{2}}$ و $-(1+i)\sqrt{\frac{b}{2}}$ هما الجذران المربعان للعدد Z

(4) إذا كان $Z \in i\mathbb{R}_-$ ($b \in \mathbb{R}_-$) : $Z = ib$: $(1-i)\sqrt{\frac{b}{2}}$ و $-(1-i)\sqrt{\frac{b}{2}}$ هما الجذران المربعان للعدد Z

(5) إذا كان $Z = a + ib$ ($a \neq 0$ و $b \neq 0$) :

❖ إذا كان $b > 0$:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})} + i\sqrt{\frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2})} \\ & \text{و} \quad -\sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})} - i\sqrt{\frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2})} \\ & \text{هما الجذران المربعان للعدد } Z \end{aligned}$$

❖ إذا كان $b < 0$:

$$\sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})} - i\sqrt{\frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2})}$$

و $-\sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})} + i\sqrt{\frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2})}$

هما الجذران المربعان للعدد Z

11. المعادلات من الدرجة الثانية :

نعتبر المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ ($a \neq 0$)

حل المعادلة $az^2 + bz + c = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

❖ إذا كان $\Delta = 0$:

فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا هو : $z = \frac{-b}{2a}$

❖ إذا كان $\Delta \neq 0$:

فإن Δ يقبل جذرين مربعين هما μ و $-\mu$ و يكون للمعادلة حلين هما :

$$z = \frac{-b + \mu}{2a} \text{ أو } z = \frac{-b - \mu}{2a}$$

ملاحظة : إذا كان z_1 و z_2 هما حلي المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ فإن :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} \\ z_1 \times z_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

12. التحويلات الإعتيادية :

نعتبر تحويلا في المستوى يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$

❖ الكتابة العقدية للإزاحة T ذات المتجهة $\vec{u}$ هي : $z' = z + z_{\vec{u}}$

❖ الكتابة العقدية للتحاكي الذي مركزه $\Omega(\omega)$ و نسبته k هي : $z' - \omega = k(z - \omega)$

❖ الكتابة العقدية للدوران الذي مركزه $\Omega(\omega)$ و زاويته θ هي : $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$

نعتبر التطبيق : $f : P \mapsto P$
 $M(z) \mapsto M'(z')$ حيث $z' = az + b$

➤ إذا كان $a = 1$:

فإن f إزاحة متجهتها $\vec{u}$ ذات اللق b

➤ إذا كان $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$:

فإن f تحاكي مركزه Ω لحقه $\frac{b}{1-a}$ و نسبته a

(Ω) هي النقطة الصامدة بالتحويل f أي $f(\Omega) = \Omega$ ويتم تحديد لحقها بحل المعادلة $z = az + b$

➤ إذا كان $a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ حيث $|a| = 1$:

فإن f دوران مركزه Ω لحقه $\frac{b}{1-a}$ و زاويته $\arg(a)$

(Ω) هي النقطة الصامدة بالتحويل f أي $f(\Omega) = \Omega$ ويتم تحديد لحقها بحل المعادلة $z = az + b$

➤ إذا كان $a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ حيث $|a| \neq 1$:

$$f = h \circ r$$

حيث : h هو التحاكي الذي مركزه Ω لحقه $\frac{b}{1-a}$ ونسبته $|a|$

و r هو الدوران مركزه Ω لحقه $\frac{b}{1-a}$ و زاويته $\arg(a)$

ملاحظات :

- إذا كان r دوران مركزه Ω و زاويته θ فإن r^{-1} هو الدوران العكسي للدوران r له نفس المركز و زاويته $-\theta$
- التحاكي الذي نسبته -1 هو تماثل مركزي