ثانوية الجولان التأهيلية
بيوكرى

الثانية علوم رياضية

الأستاذ : أحمد مومني

المعادلات التفاضلية

المعدلة التفاضلية هي كل معادلة يكون المجهول فيها دالة عددية وتحتوي على مشتقات هذه الدالة
حل معادلة تفاضلية ما يعني إيجاد جميع الدوال y التي تحقق هذه المعادلة . و مجموعة هذه الدوال تسمى الحل العام للمعادلة التفاضلية و كل عنصر من هذه المجموعة يسمى حلا خاصا
في هذا الدرس سنتطرق إلى نوعين من المعادلات التفاضلية :
1 – المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى : $y'=ay+b$
2 – المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية: $y''+ay'+b=0$

I – المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى

1 – المعادلة التفاضلية من نوع : $y'=ay$

a – خاصية

ليكن $a\in\mathbb{R}$
الحل العام لمعادلة من نوع $y'=ay$ هو كل دالة y على شكل $y:x\to Ae^{ax}$ حيث A ثابتة حقيقية تحدد بالشروط البدئية

b – مثال

حدد الحل العام للمعادلة التفاضلية $(E):\quad y'=-3y$ و الذي يحقق الشرط $y(0)=\frac{1}{5}$

الحل:
حسب الخاصية السابقة الحل العام للمعادلة (E) هو الدالة y المعرفة كما يلي: $y(x)=Ae^{-3x}$ حيث A ثابتة حقيقية سنحددها

لدينا $y(0)=\frac{1}{5}\Leftrightarrow Ae^{0}=\frac{1}{5}\Leftrightarrow A=\frac{1}{5}$

ومنه الحل العام للمعادلة التفاضلية $(E):\quad y'=-3y$ و الذي يحقق الشرط البدئي $y(0)=\frac{1}{5}$ هو الدالة y المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $y(x)=\frac{1}{5}e^{-3x}$

2 – المعادلة التفاضلية من نوع : $y'=ay+b$

a – خاصية

ليكن a و b عددين حقيقيين غير منعدمين
الحل العام لمعادلة من نوع $y'=ay+b$ هو كل دالة y على شكل $y:x\to Ae^{ax}-\frac{b}{a}$ حيث A ثابتة حقيقية تحدد بالشروط البدئية

b – مثال

حدد الحل العام للمعادلة التفاضلية $(E):\quad y'=7y+5$ و الذي يحقق الشرط $y(-1)=3$

الحل :
حسب الخاصية السابقة الحل العام للمعادلة (E) هو الدالة y المعرفة كما يلي: $y(x)=Ae^{7x}-\frac{5}{7}$ حيث A ثابتة حقيقية سنحددها

لدينا

$$y(-1)=3 \Leftrightarrow Ae^{-7}-\frac{5}{7}=3$$
$$\Leftrightarrow Ae^{-7}=3+\frac{5}{7}=\frac{26}{7}$$
$$\Leftrightarrow A=\frac{26}{7}e^{7}$$

لدينا ادن الحل العام للمعادلة التفاضلية $(E):\quad y'=7y+5$ و الذي يحقق الشرط البدئي $y(-1)=3$ هو الدالة y المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $y(x)=\frac{26}{7}e^{7}e^{7x}-\frac{5}{7}=\frac{26}{7}e^{7(x+1)}-\frac{5}{7}$

II – المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية:

1 – تحديد الحل العام لمعدلة تفاضلية من الرتبة الثانية :

لتكن $(E):\quad y''+ay'+by=0$ معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية

المعادلة التالية $r^2+ar+b=0$ تسمى المعدلة المميزة للمعادلة التفاضلية (E)

وليكن $\Delta=a^2-4b$ مميز المعدلة المميزة

الجدول التالي يلخص الحالات الثلاثة المرتبطة بإشارة $\Delta=a^2-4b$ و كيفية تحديد الحل العام للمعادلة (E)

إشارة المميز Δ	حلول المعادلة المميزة	الحل العام للمعادلة (E)
$\Delta=0$	المعادلة المميزة لها حل وحيد $r=\frac{-a}{2}$	الحل العام للمعادلة (E) يكتب على شكل : $y:x\to(Ax+B)e^{rx}$
$\Delta>0$	المعادلة المميزة لها حلين حقيقيين هما: $r_1=\frac{-a-\sqrt{\Delta}}{2}$ و $r_2=\frac{-a+\sqrt{\Delta}}{2}$	الحل العام للمعادلة (E) يكتب على شكل : $y:x\to Ae^{r_1x}+Be^{r_2x}$
$\Delta<0$	المعادلة المميزة لها حلين عقديين مترافقين يكتبان على شكلهما الجبري : $r_1=\rho+i\omega$ و $r_2=\rho-i\omega$	الحل العام للمعادلة (E) يكتب على شكل : $y:x\to(A\cos(\omega x)+B\sin(\omega x))e^{\rho x}$

ملاحظة:

A و B ثابتتان حقيقيتان تحددان بالشروط البدئية (أنظر الأمثلة)

يمكن تلخيص مضمون الجدول أعلاه في الخطاطة التالية و التي تبين أهم المراحل الضرورية و الكافية لحل معادلة تفاضلية من النوع (E)

$$\boxed{(E):\quad y''+ay'+by=0}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{r^2+ar+b=0}$$

$\boxed{\Delta=0}$	$\boxed{\Delta>0}$	$\boxed{\Delta<0}$
الحل العام للمعادلة (E) يكتب على شكل : $y:x\to(Ax+B)e^{rx}$ حيث r هو الحل الوحيد للمعادلة المميزة	الحل العام للمعادلة (E) يكتب على شكل : $y:x\to Ae^{r_1x}+Be^{r_2x}$ حيث r_1 و r_2 هما الحلين الحقيقيين للمعادلة المميزة	الحل العام للمعادلة (E) يكتب على شكل : $y:x\to(A\cos(\omega x)+B\sin(\omega x))e^{\rho x}$ حيث $r_1=\rho+i\omega$ و $r_2=\rho-i\omega$ حلين عقديين للمعادلة التفاضلية

2 - أمثلة

مثال رقم 01:

لتكن (E) المعادلة التفاضلية التالية: $y''-2y'+3y=0$

حدد الحل العام لهذه المعادلة

الحل

المعادلة المميزة لهذه المعادلة التفاضلية هي : $r^2-2r+3=0$

لدينا $\Delta=(-2)^2-4(3)=4-12=-8=\left(i\sqrt{8}\right)^2$

$\Delta \langle 0$ ادن المعادلة المميزة لها حلين عقديين و هما:

$$r_1=\frac{2-i\sqrt{8}}{2}=\frac{2-i\,2\sqrt{2}}{2}=1-i\sqrt{2} \quad \text{و} \quad r_2=\frac{2+i\sqrt{8}}{2}=1+i\sqrt{2}$$

ومنه الحل العام للمعادلة (E) هو: $y:x\to\left(A\cos(\sqrt{2}x)+B\sin(\sqrt{2}x)\right)e^x$

مثال رقم02:

حدد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية $2y''-3y'-2y=0 \quad :(E):$

و الذي يحقق الشرطين البدئيين $y(0)=1$ و $y'(0)=-1$

الحل

المعادلة المميزة للمعادلة $(E):\quad 2y''-3y'-2y=0$ هي كما يلي: $2r^2-3r-2=0$

مميز هذه المعادلة المميزة هو: $\Delta=3^2-4(2)(-2)=9+16=25$ ا

$\Delta \rangle 0$ ادن المعادلة المميزة لها حلين حقيقيين و هما :

$$r_1=\frac{3-\sqrt{25}}{4}=\frac{-1}{2} \quad \text{و} \quad r_2=\frac{3+\sqrt{25}}{4}=2$$

ومنه الحل العام للمعادلة التفاضلية (E) هو: $y:x\to Ae^{\frac{-1}{2}x}+Be^{2x}$ حيث A و B ثابتتان حقيقيتان تحددان بالشروط البدئية : ا

لدينا :

$$y(0)=1\Leftrightarrow Ae^0+Be^0=1$$
$$\Leftrightarrow A+B=1$$

و لدينا

$$y'(0)=-1\Leftrightarrow \frac{-1}{2}Ae^0+2Be^0=-1$$
$$\Leftrightarrow \frac{-1}{2}A+2B=-1$$

لدينا ادن النظمة التالية:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ \frac{-1}{2}A+2B=-1 \end{cases}$$

من السهل حل هذه النظمة ونحصل على $A=\frac{6}{5}$ و $B=\frac{-1}{5}$

و منه الحل العام للمعادلة التفاضلية (E) و الذي يحقق الشرطين البدئيين $y(0)=1$ و $y'(0)=-1$ هو:

$$y:x\to\frac{6}{5}e^{\frac{-1}{2}x}-\frac{1}{5}e^{2x}$$