

الدوال الأسية

تمرين 1

حدد D_f : $f(x) = \frac{\sqrt{e^{3x} - 5}}{\ln(28 - 3x)}$

الحل

تحديد D_f : $f(x) = \frac{\sqrt{e^{3x} - 5}}{\ln(28 - 3x)}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / e^{3x} - 5 \geq 0 \text{ et } \ln(28 - 3x) \neq 0 \text{ et } 28 - 3x > 0\}$$

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / x \geq \frac{\ln 5}{3} \text{ et } x \neq 9 \text{ et } x < \frac{28}{3}\right\}$$

$$D_f = \left[\frac{\ln 5}{3}; 9[\cup]9; \frac{28}{3}\right[$$

تمرين 2

حل في $\mathbb{R}$: $e^{2x} - 11e^x + 30 = 0$ -1

-2 $e^{3x} - 2e^{2x} - e^x + 2 = 0$

-3 $\frac{6x}{e^{2x-1}} - 2e^{\frac{4x}{2x-1}} - e^{\frac{2x}{2x-1}} + 2 = 0$

-4 $e^{2x} - 15e^x + 56 \geq 0$

-5 $\frac{2 - 3e^{-x}}{1 - 3e^{-x}} < \frac{1}{2}$

الحل

-1 $e^{2x} - 11e^x + 30 = 0$

نضع : $X > 0$ إذن $e^x = X$

إذن : $X^2 - 11X + 30 = 0$

نجد : $X = 8$ أو $X = 7$

إذن : $e^x = 5$ أو $e^x = 6$

ومنه : $x = \ln 5$ أو $x = \ln 6$

$$S = \{\ln 6; \ln 5\}$$

-2 $e^{3x} - 2e^{2x} - e^x + 2 = 0$

$$e^{3x} - 2e^{2x} - e^x + 2 = e^{2x}(e^x - 2) - (e^x - 2) = (e^x - 2)(e^{2x} - 1)$$

$$e^{3x} - 2e^{2x} - e^x + 2 = (e^x - 2)(e^x - 1)(e^x + 1)$$

$$e^{3x} - 2e^{2x} - e^x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \ln 2 \text{ ou } x = 0$$

$$S = \{\ln 2; 0\}$$

-3 $\frac{6x}{e^{2x-1}} - 2e^{\frac{4x}{2x-1}} - e^{\frac{2x}{2x-1}} + 2 = 0$

مجموعة تعريف المعادلة هي : $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

نضع : $X > 0$ إذن $e^{\frac{2x}{2x-1}} = X$

إذن : $X^3 - 2X^2 - X + 2 = 0$

ومنه : $(X - 2)(X - 1)(X + 1) = 0$

إذن : $X = 2$ أو $X = 1$

ومنه : $e^{\frac{2x}{2x-1}} = 2$ أو $e^{\frac{2x}{2x-1}} = 1$

إذن : $\frac{2x}{2x-1} = \ln 2$ أو $\frac{2x}{2x-1} = 0$

ومنه : $x = \frac{-\ln 2}{2(\ln 2 - 1)}$ أو $x = 0$

$$S = \left\{\frac{-\ln 2}{2(\ln 2 - 1)}; 0\right\}$$

-4 $e^{2x} - 15e^x + 56 \geq 0$

نضع : $X > 0$ إذن $e^x = X$

إذن : $X^2 - 15X + 56 \geq 0$

$X^2 - 15X + 56 = 0 \Leftrightarrow X = 8$ أو $X = 7$

إذن : $X^2 - 15X + 56 \geq 0$

يعني : $X \in]0; 7] \cup [8; +\infty[$

يعني : $e^x \in]0; 7] \cup [8; +\infty[$

يعني : $x \in \ln(]0; 7] \cup [8; +\infty[)$

و بما أن $\ln$ تزايدية

فإن : $x \in]\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x; \ln 7] \cup [\ln 8; \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x[$

$x \in]-\infty; \ln 7] \cup [\ln 8; +\infty[$

ومنه : $S =]-\infty; \ln 7] \cup [\ln 8; +\infty[$

-5 $\frac{2 - 3e^{-x}}{1 - 3e^{-x}} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2e^x - 3}{e^x - 3} < \frac{1}{2}$

نضع : $X > 0$ إذن $e^x = X$

$$\frac{2e^x - 3}{e^x - 3} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2X - 3}{X - 3} < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2X - 3}{X - 3} - \frac{1}{2} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3X - 3}{2(X - 3)} < 0$$

$$\Leftrightarrow X \in]1; 3[$$

$$X \in]1; 3[$$

يعني : $e^x \in]1; 3[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-5x} \sqrt[3]{x^2}$$

-3 بنفس الطريقة نجد :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7 + e^{5x}}{2 - e^{3x}} \quad -4$$

نضع : $t = e^x$ ومنه : $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow t \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7 + e^{5x}}{2 - e^{3x}} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{7 + t^5}{2 - t^3} \\ &= - \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7 + e^{5x}}{2 - e^{3x}} = -\infty$$

ومنه :

-5

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^9 e^{4x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^9 e^x \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{3x} \\ &= 0 \times 0^3 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^9 e^{4x} = 0$$

إذن :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{11} e^{\frac{3}{4}x} \quad -6 \text{ حساب :}$$

نضع : $t = \frac{3}{4}x$ ومنه : $x \rightarrow -\infty \Leftrightarrow t \rightarrow -\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{11} e^{\frac{3}{4}x} &= \left(\frac{4}{3}\right)^{11} \lim_{t \rightarrow -\infty} t^{11} e^t \\ &= \left(\frac{4}{3}\right)^{11} \times 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{11} e^{\frac{3}{4}x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-3x} + 1}{e^{2x} + e^{-x}} \quad -7$$

نضع : $t = e^{-x}$ ومنه : $x \rightarrow -\infty \Leftrightarrow t \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-3x} + 1}{e^{2x} + e^{-x}} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{-3} + 1}{t^2 + t^{-1}} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^3 + 1}{t^5 + t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^3}{t^5} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-3x} + 1}{e^{2x} + e^{-x}} = 0$$

يعني : $x \in \ln]1; 3[$

وبما أن $\ln$ تزايدية

فإن : $x \in]0; \ln 3[$

$$S =]0; \ln 3[$$

تمرين 3

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{7x}}{\sqrt[5]{x^2}} \quad -2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{5x}}{x^3} \quad -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7 + e^{5x}}{2 - e^{3x}} \quad -4$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-5x} \sqrt[3]{x^2} \quad -3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{11} e^{\frac{3}{4}x} \quad -6$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^9 e^{4x} \quad -5$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - e^x}{x^2 + 3x + 1} \quad -8$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-3x} + 1}{e^{2x} + e^{-x}} \quad -7$$

الحل

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3} \quad -1 \text{ حساب :}$$

مباشرة : $\frac{+\infty}{+\infty}$ شكل غير محدد

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty \quad \text{لدينا :}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{5x}}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{4x} \\ &= (+\infty) \times (+\infty) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{5x}}{x^3} = +\infty$$

إذن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{7x}}{\sqrt[5]{x^2}} \quad -2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{7x}}{\sqrt[5]{x^2}} = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{35x}}{x^2} \right)^{\frac{1}{5}}$$

$$= \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{34x} \right)^{\frac{1}{5}}$$

$$= (+\infty \times +\infty)^{\frac{1}{5}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{7x}}{\sqrt[5]{x^2}}$$

إذن :

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-11} = 125 - 11 \quad 2^{x+1} = 5^x - 10$$

$$x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt[4]{x}\right)^{1+\sqrt{x}} - 12$$

الحل

$$a \in \mathbb{R}^{+*} - \{1\}$$

$$2^x = 6 - 1$$

$$2^x = 6 \Leftrightarrow e^{x \ln 2} = 6$$

$$\Leftrightarrow x \ln 2 = \ln 6$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln 6}{\ln 2}$$

$$S = \left\{ \frac{\ln 6}{\ln 2} \right\}$$

$$2^x = 6 \Leftrightarrow \log_2(2^x) = \log_2(6)$$

$$\Leftrightarrow x = \log_2(6)$$

أو :

$$S = \{\log_2(6)\}$$

$$2^x = 16 - 2$$

$$2^x = 16 \Leftrightarrow e^{x \ln 2} = 16$$

$$\Leftrightarrow x \ln 2 = \ln 16$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \ln 2}{\ln 2}$$

$$S = \{4\}$$

$$3^x < 7 - 5$$

$$3^x < 7 \Leftrightarrow e^{x \ln 3} < 7$$

$$\Leftrightarrow x \ln 3 < \ln 7$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{\ln 7}{\ln 3}$$

$$S = \left] -\infty; \frac{\ln 7}{\ln 3} \right[$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x < 16 - 6$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x < 16 = 2^4 \Leftrightarrow e^{-x \ln 2} < 2^4$$

$$\Leftrightarrow -x \ln 2 < \ln 16$$

$$\Leftrightarrow x > -\frac{\ln 16}{\ln 2}$$

$$S = \left] -\frac{\ln 16}{\ln 2}; +\infty \right[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - e^x}{x^2 + 3x + 1} - 8$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - e^x}{x^2 + 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2 + 3x + 1} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 3x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2 + 3x + 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x}{x^2}}{1 + 3 \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - e^x}{x^2 + 3x + 1} = -\infty$$

تمرين 4

حدد f' في كل حالة :

$$f(x) = (e^{2x} - 5) \ln(3x + 4) - 1$$

$$f(x) = (e^{3x} + 4) \sqrt[3]{e^x + 2} - 2$$

الحل

$$f'(x) = \left((e^{2x} - 5) \ln(3x + 4) \right)' - 1$$

$$f'(x) = 2e^{2x} \ln(3x + 4) + \frac{3(e^{2x} - 5)}{3x + 4}$$

$$f'(x) = \left((e^{3x} + 4) \sqrt[3]{e^x + 2} \right)' - 2$$

$$f'(x) = 3e^{3x} \sqrt[3]{e^x + 2} + \frac{e^x (e^{3x} + 4)}{3 \sqrt[3]{e^x + 2}^2}$$

تمرين 5

حل في $\mathbb{R}$:

$$2^x = 16 - 2$$

$$10^x = 1000 - 4$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x < 16 - 6$$

$$2^x = 6 - 1$$

$$10^x = 600 - 3$$

$$3^x < 7 - 5$$

$$9^x - 2 \times 3^x + 1 = 0 - 7$$

$$4^x - 2 \times 2^x - 15 > 0 - 8$$

$$1000^x - 10^x < 0 - 9$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-11} = 125 \Leftrightarrow 5^{11-x^2} = 5^3$$

$$\Leftrightarrow \log_5(5^{11-x^2}) = \log_5(5^3)$$

$$\Leftrightarrow 11-x^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow 9-x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 3$$

$$x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt[4]{x}\right)^{1+\sqrt{x}} \quad -12$$

مجموعة تعريف المعادلة : $\mathbb{R}^{+*} - \{1\}$

$$x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt[4]{x}\right)^{1+\sqrt{x}} \Leftrightarrow x^{\sqrt{x}} = x^{\frac{1+\sqrt{x}}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1+\sqrt{x}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

مسألة 1

I - نعتبر الدالة g المعرفة على $]-\infty; 0[$ بما يلي :

$$g(x) = x + 1 + \ln(-x)$$

بين أن : $\forall x \in]-\infty; 0[: g(x) \leq 0$

II - نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x \ln(-x) & x \in]-\infty; 0[\\ f(0) = 0 \\ f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} & x \in]0; +\infty[\end{cases}$$

1- بين أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

2- بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ثم أول النتيجة هندسيا .

3- أ- بين أن : f متصلة في 0

4- بين أن : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$

أول النتيجة هندسيا .

5- بين أن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$

أول النتيجة هندسيا .

6- أ- بين أن :

$$9^x - 2 \times 3^x + 1 = 0 \quad -7$$

$$9^x - 2 \times 3^x + 1 = 0 \Leftrightarrow 3^{2x} - 2 \times 3^x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3^x - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3^x = 1$$

$$\Leftrightarrow x \ln 3 = 0$$

$$S = \{0\}$$

$$4^x - 2 \times 2^x - 15 > 0 \quad -8$$

$$4^x - 2 \times 2^x - 15 > 0 \Leftrightarrow (2^x - 5)(2^x + 3) > 0$$

$$\Leftrightarrow 2^x \in]-\infty; -3[\cup]5; +\infty[$$

ولدينا : $2^x > 0$

إذن : $2^x \in]5; +\infty[$

بما أن : $2 > 1$

فإن : $\log_2$ تزايدية قطعاً

إذن : $\log_2(2^x) \in \log_2(]5; +\infty[)$

ومنه : $x \in \log_2(5); +\infty[$

$$S = \log_2(5); +\infty[$$

$$2^{x+1} = 5^x \quad -10$$

$$2^{x+1} = 5^x \Leftrightarrow e^{(x+1) \ln 2} = e^{x \ln 5}$$

$$\Leftrightarrow (x+1) \ln 2 = x \ln 5$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln 2}{\ln 5 - \ln 2}$$

$$2^{x+1} = 5^x \Leftrightarrow 2 \times 2^x = 5^x$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^x = 2 \quad \text{أو}$$

$$\Leftrightarrow x = \log_5(2)$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-11} = 125 \quad -11$$

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x \ln(-x) & x \in]-\infty; 0[\\ f(0) = 0 \\ f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} & x \in]0; +\infty[\end{cases}$$

-1

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 2x \ln(-x) \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 - 2t \ln(t) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \left(1 - 2 \frac{\ln(t)}{t} \right)$$

$$\text{بما أن : } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0 \quad \text{فإن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty (1 - 0) :$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{إن:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \text{-2 نعلم أن :}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= e^0 \end{aligned} \quad \text{إن:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \quad \text{و منه :}$$

$$y = 1 \quad \text{مقارب لـ } (C_f) \text{ بجوار } +\infty$$

-3 أ-

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 + 2x \ln(-x)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} t^2 - 2t \ln(t) \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln(t) &= 0 \quad \text{بما أن :} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 - 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \quad \text{و منه :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} \quad \text{-}$$

$$t = \frac{\ln(x)}{x} \quad \text{نضع :}$$

$$t \rightarrow -\infty \quad \text{إذا كان } x \rightarrow 0^+ \quad \text{فإن}$$

$$\begin{cases} f'(x) = 2g(x) & x \in]-\infty; 0[\\ f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} e^{\frac{\ln x}{x}} & x \in]0; +\infty[\end{cases}$$

ب- استنتج أن : f تناقصية على المجال : $]-\infty; 0[$

تزايدية على المجال : $]0; e[$

تناقصية على المجال : $[e; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \quad \text{-7 بين أن :}$$

أول النتيجة هندسيا .

-8 أ- بين أن (C_f) يقبل النقطة ذات الأفصول -1

نقطة انعطاف

ب- حدد معادلة المماس لـ (C_f) عند النقطة

ذات الأفصول -1

ج- حدد معادلة المماس لـ (C_f) عند النقطة

ذات الأفصول 1

-9 ضع جدول تغيرات f ثم أنشئ (C_f) التمثيل

المبياني لـ f على معلم متعامد ممنظم

$$e \simeq 2,7 \quad ; \quad e^e \simeq 1,5 \quad (\text{الوحدة } 2cm)$$

III احسب $A(\Delta)$ مساحة الحيز المحصور بين C_g

و المستقيمين $x = -1$ و $x = -e$

حل المسألة 1

I - نعتبر x من $]-\infty; 0[$

$$g(x) = x + 1 + \ln(-x)$$

$$g'(x) = \frac{x+1}{x}$$

x	$-\infty$	-1	0
$g(x)$		$g(-1)$	

من جدول التغيرات نستنتج :

$$\forall x \in]-\infty; 0[: g(x) \leq g(-1)$$

$$\text{بما أن : } g(-1) = 0$$

$$\text{فإن : } \forall x \in]-\infty; 0[: g(x) \leq 0$$

فإن : f تناقصية على المجال : $]-\infty; 0[$
 لدينا : $1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq e$
 إذن : f تزايدية على المجال : $]0; e]$
 و f تناقصية على المجال : $[e; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x \ln(-x)}{x} \quad -7$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 2 \ln(-x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -t + 2 \ln(t)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} t \left(-1 + 2 \frac{\ln(t)}{t} \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0 \quad \text{ولدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty (-1 + 0) \quad \text{إذن:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \quad \text{إذن:}$$

ومنه : محور الأرتيب اتجاه مقارب ل (C_f) بجوار $-\infty$

$$f'(x) = 2g(x) \quad x \in]-\infty; 0[\quad \text{8- أ- لدينا}$$

$$f''(x) = 2g'(x) \quad x \in]-\infty; 0[\quad \text{إذن:}$$

و حسب I- : $g'(-1) = 0$ و $g'(x)$ تتغير إشارتها بجوار -1

$$\text{إذن: } f''(-1) = 0 \text{ و } f''(x) \text{ تتغير إشارتها بجوار } -1$$

ومنه : (C_f) يقبل النقطة ذات الأفصول -1 نقطة انعطاف

$$f'(-1) = 0 \text{ و } f(-1) = 1 \quad \text{ب- لدينا}$$

إذن: $y = 1$ هي معادلة المماس ل (C_f) عند النقطة ذات الأفصول -1

$$f'(1) = 1 \text{ و } f(1) = 1 \quad \text{ج- لدينا}$$

إذن: $y = x$ هي معادلة المماس ل (C_f) عند النقطة ذات الأفصول 1

9- جدول تغيرات f

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t \quad \text{إذن:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \quad \text{ومنه :}$$

$$f(0) = 0 \quad \text{و لدينا :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \quad \text{إذن:}$$

$$f \text{ متصلة في } 0 \quad \text{إذن:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 2x \ln(-x)}{x} \quad -4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x + 2 \ln(-x) = 0 - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty \quad \text{إذن:}$$

ومنه : (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى يسار

النقطة ذات الأفصول 0

-5

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{\ln x}{x}} - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} e^{\frac{\ln x}{x}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} \\ &\text{حساب : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} e^{\frac{\ln x}{x}} \end{aligned}$$

$$t = \frac{\ln(x)}{x} \quad \text{نضع :}$$

إذا كان : $x \rightarrow 0^+$ فإن $t \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} e^{\frac{\ln x}{x}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} t e^t = 0 \quad \text{إذن:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = -\infty \quad \text{و لدينا :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 \times 0 \quad \text{إذن:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 \quad \text{ومنه :}$$

إذن: (C_f) يقبل نصف مماس أفقي يمين النقطة ذات الأفصول

0

أ- 6-

$$\begin{cases} f'(x) = 2g(x) & x \in]-\infty; 0[\\ f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} e^{\frac{\ln x}{x}} & x \in]0; +\infty[\end{cases}$$

ب- بما أن : $g(x) \leq 0$: $\forall x \in]-\infty; 0[$

و لدينا : $f'(x) = 2g(x)$ على المجال $]-\infty; 0[$

إذن : $A(\Delta) = -\frac{1}{2} \int_{-e}^{-1} f'(x) dx$

ومنه : $A(\Delta) = -\frac{1}{2} [f(x)]_{-e}^{-1}$

إذن : $A(\Delta) = -\frac{1}{2} [x^2 + 2x \ln(-x)]_{-e}^{-1}$

إذن : $A(\Delta) = \frac{1}{2} (e^2 - 2e - 1)$

مسألة 2

I-1- نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ بما يلي :

$$g(x) = -x + \frac{1}{2} + \ln(x)$$

بين أن : $\forall x \in]0; +\infty[: g(x) < 0$

2- بين أن : حل المتراجحة $2e^{2x} + e^x - 1 \geq 0$

في المجال $]-\infty; 0[$ هو المجال $[-\ln 2; 0]$

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = e^{2x} + e^x - x & x \in]-\infty; 0] \\ f(x) = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^3}{3} + 2 & x \in]0; +\infty[\end{cases}$$

1- بين أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

2- بين أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = 0$

أول النتيجة هندسيا .

3- بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

4- بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

أول النتيجة هندسيا .

5- أ- بين أن : f متصلة في 0

6- بين أن : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 2$

أول النتيجة هندسيا .

7- بين أن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$

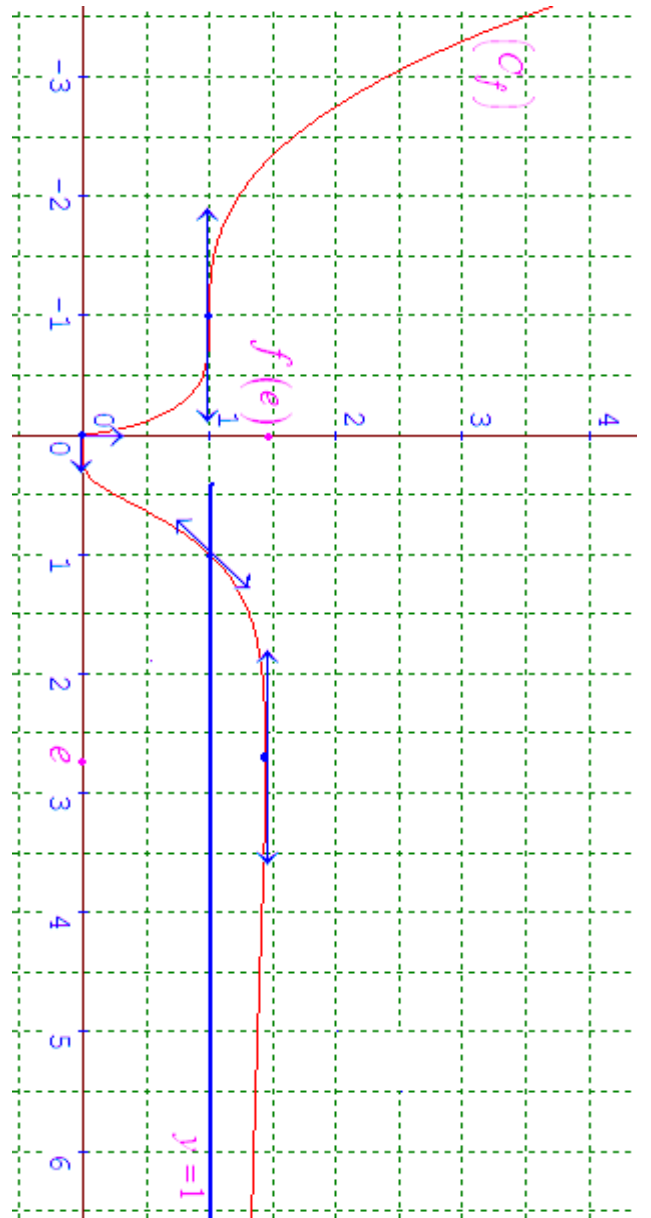
أول النتيجة هندسيا .

8- أ- بين أن :

$$\begin{cases} f'(x) = 2e^{2x} + e^x - 1 & x \in]-\infty; 0] \\ f'(x) = xg(x) & x \in]0; +\infty[\end{cases}$$

x	$-\infty$	0	e	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0	$\frac{1}{e^e}$	1

إنشاء (C_f)



(الوحدة 2cm) $e \simeq 2,7$ ؛ $\frac{1}{e^e} \simeq 1,5$

III حساب $A(\Delta)$ مساحة الحيز المحصور بين C_g

و المستقيمين $x = -1$ و $x = -e$

لدينا : $\forall x \in]-\infty; 0[: g(x) \leq 0$

إذن : $g(x) \leq 0$ سالبة على المجال $[-e; -1]$

ومنه : $A(\Delta) = -\int_{-e}^{-1} g(x) dx$

ب- استنتج أن : f تناقصية على المجال : $]-\infty; -\ln 2]$

تزايدية على المجال : $[-\ln 2; 0]$

تناقصية على المجال : $]0; +\infty[$

9- ضع جدول تغيرات f ثم أنشئ (C_f) التمثيل المبياني

ل f على معلم متعامد ممنظم

(الوحدة $2cm$) $f(-\ln 2) \simeq 1,44$ ؛

$f(2,36) \simeq 0$

$\ln 2 = 0.7$

حل المسألة 2

I -1- لدينا : $\forall x \in]0; +\infty[: g(x) = -x + \frac{1}{2} + \ln(x)$

إذن : $\forall x \in]0; +\infty[: g(x) = \frac{1-x}{x}$

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$		$g(1)$	

من جدول التغيرات نستنتج :

$\forall x \in]0; +\infty[: g(x) \leq g(1)$

بما أن : $g(1) = -\frac{1}{2}$

فإن : $\forall x \in]0; +\infty[: g(x) < 0$

2 - حل المتراجحة : $2e^{2x} + e^x - 1 \geq 0$ في المجال

$]-\infty; 0]$

نضع : $e^x = X$ إذن : $X \in]0; 1]$

إذن : $2X^2 + X - 1 \geq 0$

نجد : $X = -1$ أو $X = \frac{1}{2}$

ومنه : $2X^2 + X - 1 \geq 0$

يعني : $X \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

يعني : $e^x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

يعني : $x \in \ln\left(\left[\frac{1}{2}; 1\right]\right)$

و بما أن : $\ln$ تزايدية

فإن : $x \in \left[\ln \frac{1}{2}; \ln 1\right]$

إذن : $x \in [-\ln 2; 0]$

ومنه : $S = [-\ln 2; 0]$

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = e^{2x} + e^x - x & x \in]-\infty; 0] \\ f(x) = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^3}{3} + 2 & x \in]0; +\infty[\end{cases}$$

1-لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} + e^x - x)$

إذن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 + 0 + \infty$

ومنه : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

2- لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} + e^x)$

إذن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = 0 + 0$

ومنه : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = 0$

إذن : $y = -x$ مقارب ل (C_f) بجوار $-\infty$

3- لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^3}{3} + 2$

إذن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(\frac{1}{2} \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{3} + \frac{2}{x^3} \right)$

نعلم أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

إذن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \left(0 - \frac{1}{3} + 0 \right)$

ومنه : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

4 - لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} \ln(x) - \frac{x^2}{3} + \frac{2}{x}$

إذن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{1}{2} \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{3} + \frac{2}{x^3} \right)$

نعلم أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

إذن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \left(0 - \frac{1}{3} + 0 \right)$

ومنه : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

إذن : محور الأرتايب اتجاه مقارب ل (C_f) بجوار $+\infty$

5- أ- بين أن : f متصلة في 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{2x} + e^x - x = 1 + 1 - 0 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2 \quad \text{ومنه :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^3}{3} + 2 = 0 - 0 + 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln(x) = 0 \quad \text{بما أن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 - 0 + 2 = 2 \quad \text{فإن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2 \quad \text{ومنه :}$$

$$\text{لدينا : } f(x) = e^{2x} + e^x - x \quad \text{لكل } x \text{ من }]-\infty; 0]$$

$$\text{بما أن : } 0 \in]-\infty; 0] \quad \text{فإن : } f(0) = 1 + 1 - 0 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 2 \quad \text{ومنه :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 2 \quad \text{إذن :}$$

$$f \text{ متصلة في } 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} + e^x - x - 2}{x - 0} = 2 \quad \text{لدينا -6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} + e^x - x - 2}{x - 0} = 2 \quad \text{حساب :}$$

$$g(x) = e^{2x} + e^x - x \quad \text{نضع :}$$

$$g \text{ متصلة قابلة للإشتقاق في } \mathbb{R}$$

$$g'(0) = 2 \quad ; \quad g(0) = 2 \quad ; \quad g'(x) = 2e^{2x} + e^x - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} + e^x - x - 2}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} + e^x - x - 2}{x - 0} = g'(0) = 2$$

إذن :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} + e^x - x - 2}{x - 0} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 2 \quad \text{ومنه :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} + e^x - x - 2}{x - 0} = 2 \quad \text{حساب : بطريقة أخرى}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} + e^x - x - 2}{x - 0} = 2 \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{2x} + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{2x} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \text{لدينا :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} + e^x - x - 2}{x - 0} = 2 + 1 - 1 = 2 \quad \text{إذن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 2 \quad \text{ومنه :}$$

$$\text{إذن : } f \text{ قابلة للإشتقاق يسار 0 و } f'_g(0) = 2$$

$$\text{ومنه : } (C_f) \text{ يقبل نصف مماس أفقي يسار النقطة ذات الأفصول 0 معادلته : } y = 2x + 2$$

7- لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{2} \ln(x) - \frac{x^2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0 \quad \text{نعلم أن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 - 0 = 0 \quad \text{إذن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 \quad \text{ومنه :}$$

$$\text{إذن : } f \text{ قابلة للإشتقاق يمين 0 و } f'_d(0) = 0$$

$$\text{ومنه : } (C_f) \text{ يقبل نصف مماس أفقي يمين النقطة ذات الأفصول 0}$$

8- أ -

$$\begin{cases} f'(x) = 2e^{2x} + e^x - 1 & x \in]-\infty; 0] \\ f'(x) = xg(x) & x \in]0; +\infty[\end{cases}$$

$$\text{ب- من -1-1 : } \forall x \in]0; +\infty[: g(x) < 0$$

$$\text{و لدينا : } \forall x \in]-\infty; 0[: f'(x) = xg(x)$$

$$\text{إذن : } f \text{ تناقصية على المجال : }]0; +\infty[$$

$$\text{من I-2 : حل المتراجحة } 2e^{2x} + e^x - 1 \geq 0$$

$$\text{في المجال }]-\infty; 0[\text{ هو المجال } [-\ln 2; 0]$$

$$\text{و لدينا : } \forall x \in]-\infty; 0[: f'(x) = 2e^{2x} + e^x - 1$$

$$\text{إذن : } f \text{ تناقصية على المجال : }]-\infty; -\ln 2]$$

$$f \text{ تزايدية على المجال : } [-\ln 2; 0]$$

أول النتيجة هندسيا

4- أ- بين أن : f متصلة في 0

5- أ - بين أن :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 1)^2} \quad x \in \mathbb{R}^*$$

6- ضع جدول تغيرات f ثم أنشئ (C_f) التمثيل

المبياني ل f على معلم متعامد ممنظم

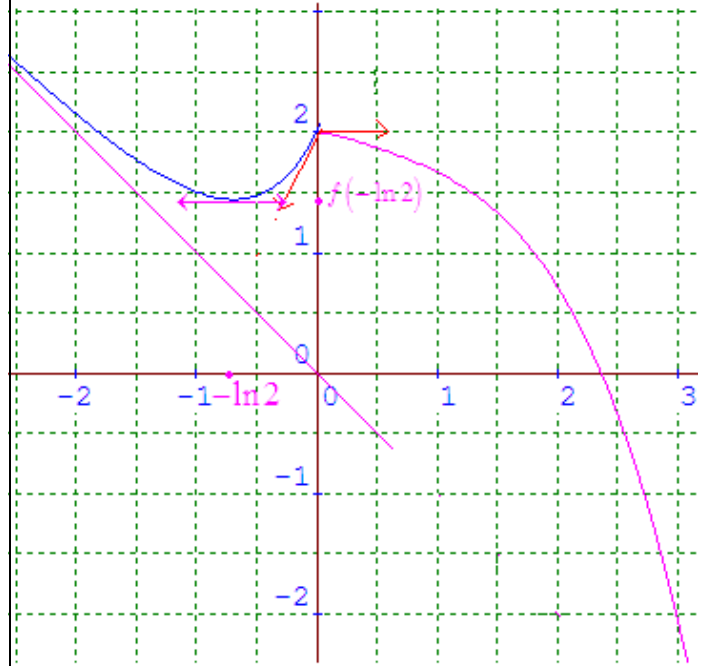
(الوحدة 2cm)

نقبل أن : f قابلة للاشتقاق في 0

9- جدول تغيرات f

x	$-\infty$	$-\ln 2$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$f(-\ln 2)$	2	$-\infty$

إنشاء (C_f)



(الوحدة 2cm) $f(-\ln 2) \simeq 1,44$ ؛ $f(2,36) \simeq 0$

$$\ln 2 = 0.7$$

مسألة 3

I-1- نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$g(x) = (1-x)e^x - 1$$

بين أن : $\forall x \in \mathbb{R} : g(x) \leq 0$

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x - 1} & x \in \mathbb{R}^* \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1- بين أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

2- بين أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = 0$

أول النتيجة هندسيا

3- بين أن : لكل x من $\mathbb{R}^*$: $f(x) = \frac{x}{e^x} \times \frac{1}{1 - e^{-x}}$

استنتج أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$