

التمرين الأول

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$

(1) أ- أدرس زوجية الدالة f

ب- أحسب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و اوعط تاويلا هندسيا للنتيجة

(2) أ- بين أن $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) = \frac{e^x(1 - e^{2x})}{(e^{2x} + 1)^2}$

ب- أدرس منحنى تغيرات الدالة f و انجز جدول تغيراتها

ج- استنتج أن $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad 0 < f(x) \leq \frac{1}{2}$

(3) أرسم المنحنى (C_f)

(4) بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل في المجال $I = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ حلا وحيدا α

(5) بين أن $(\forall x \in I) \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

(6) نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0 = 0$ و $U_{n+1} = f(U_n)$

أ- بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq U_n \leq \frac{1}{2}$

ب- بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \left| U_{n+1} - \alpha \right| \leq \frac{1}{2} \left| U_n - \alpha \right|$

ج- استنتج أن $(U_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها

التمرين الثاني

الجزء (1)

(1) حل المعادلة $2e^{-2x} - 2e^{-x} - 1 = 0$ و استنتج إشارة $2e^{-2x} - 2e^{-x} - 1$

(2) نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x) = 2e^{-x} - e^{-2x} - x$

أ- أحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب- أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f)

(3) أدرس منحنى تغيرات الدالة f و ضع جدول تغيراتها

(4) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين مختلفين α , β

(5) أرسم المنحنى (C_f) (نعطي $\alpha \approx -0,8$ و $\beta \approx 0,7$)

الجزء (2)

لتكن g الدالة المعرفة على المجال $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ بما يلي : $g(x) = 2e^{-x} - e^{-2x}$

(1) أدرس منحنى تغيرات الدالة g و بين أن $g(I) \subset I$

(2) بين أن $(\forall x \in I) \quad |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$

(3) لتكن $(U_n)_n$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $U_0 = \frac{1}{2}$ و $U_{n+1} = g(U_n)$

$$(i) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{1}{2} \leq U_n \leq 1 \quad \text{بين أن}$$

$$(b) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad |U_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{2} |U_n - \beta| \quad \text{بين أن}$$

(ج) استنتج أن $(U_n)_n$ متقاربة حدد نهايتها

التمرين الثالث

ليكن n عددا طبيعيا . نعتبر الدالة f_n المعرفة بما يلي : $f_n(x) = -1 + n(2-x)e^x$

$$(1) \quad \text{أحسب النهايتين } \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$$

(2) أحسب المشتقة $f'_n(x)$ و أدرس منحنى تغيرات الدالة f_n ثم ضع جدول تغيراتها

(3) بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ (E_n) تقبل حلين مختلفين $\alpha_n < 0$ و $\beta_n \in]1, 2[$

$$(4) \quad \text{أ- بين أن } t \text{ حل للمعادلة } (E_n) \Leftrightarrow f_{n+1}(t) = (2-t)e^t$$

ب- بين أن $f_{n+1}(\beta_n) > 0$ واستنتج أن المتتالية $(\beta_n)_n$ تزايدية

$$\text{ج- بين أن المتتالية } (\beta_n)_n \text{ متقاربة وأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = 2 \text{ و بين أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} n(\ln 2 - \ln \beta_n) = \frac{1}{2}e^{-2}$$

(5) أ- بين أن المتتالية $(\alpha_n)_n$ تناقصية

$$\text{ب- بين أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = -\infty \text{ و بين أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{\ln n} = -1$$

التمرين الرابع

الجزء (1)

$$(1) \quad \text{نضع } g(x) = e^x + x + 1$$

أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

ب- استنتج إشارة $g(x)$

$$(2) \quad \text{نعتبر الدالة العددية } f \text{ المعرفة على } \mathbb{R} \text{ بما يلي : } f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$$

أ- أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C_f)

ب- أحسب المشتقة $f'(x)$

ج- تحقق أن $f(\alpha) = 1 + \alpha$ و أنجز جدول تغيرات الدالة f

د- أرسم المنحنى (C_f) في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ بحيث $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2 \text{ cm}$ (نأخذ $\alpha \approx -1,25$)

الجزء (2)

ليكن n عدد طبيعي .

(1) أ- بين أن المعادلة $f(x) = n$ تقبل حلا وحيدا α_n

ب- أدرس رتبة المتتالية $(\alpha_n)_n$

ج- بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \alpha_n \geq n$ و استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$

$$(2) \quad \text{أ- بين أن } \alpha_n - n = ne^{-\alpha_n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \text{ و استنتج } \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n - n \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n}$$

$$\text{ب- بين أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln \alpha_n}{\ln n} = 1 \text{ و بين أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \alpha_n - n = -\infty$$

التمرين الخامس

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$

$$(1) \quad \text{أ- أحسب النهايتين } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

ب- أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f)

(2) أ- بين أن $\ln(1+t) > \frac{t}{1+t}$ ($\forall t > 0$)

ب- أحسب المشتقة $f'(x)$ واستنتج أن f تناقصية ثم ضع جدول تغيراتها

(3) بين أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم $y = x$ (Δ) في نقطة وحيدة أفصولها α ينتمي إلى المجال $]0, \ln 2[$

(4) أرسم المنحنى (C_f)

(5) نضع $I =]0, \ln 2[$ ونعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي $U_0 = \frac{1}{2}$ و $U_{n+1} = f(U_n)$

أ- بين أن $|\frac{f'(x)}{f'(x)}| \leq \frac{2}{3}$ ($\forall x \in I$)

ب- بين أن $U_n \in I$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

ج- بين أن $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|U_n - \alpha|$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) استنتج أن $(U_n)_n$ متقاربة وحدد نهايتها

التمرين السادس

ليكن n عدد طبيعي بحيث $n \geq 2$. نعتبر الدالة f_n المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بما يلي: $f_n(x) = 1 - x - e^{-nx}$

(1) بين أن $\ln x < x - 1$ ($\forall x \in]1, +\infty[$) واستنتج أن $e^{x-1} > x$ ($\forall x > 1$)

(2) أ- أحسب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$

ب- أدرس منحنى تغيرات الدالة f_n وضع جدول تغيراتها

ج- بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل في $]0, +\infty[$ حلا وحيدا نرسم له a_n وأن $a_n < 1$

(3) أ- أدرس رتبة الدالة $g(x) = \frac{\ln x}{x}$

ب- بين أن $(a_n)_{n \geq 3}$ متتالية تزايدية واستنتج أنها متقاربة

(4) بين أن $f_n\left(1 - \frac{1}{n}\right) < 0$ ($\forall n \geq 2$) واستنتج نهاية المتتالية $(a_n)_n$

التمرين السابع

ليكن n عدد طبيعي غير منعدم. نعتبر الدالة f_n المعرفة بما يلي: $f_n(x) = e^x + \frac{x}{n}$

(1) أ- أحسب نهايتي الدالة f_n

ب- أدرس تغيرات الدالة f_n وضع جدول تغيراتها

(2) بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا a_n وأن $a_n \in]-\infty, 0[$

(3) أ- بين أن المتتالية $(a_n)_n$ تناقصية

ب- بين أن $f_n(-\ln \sqrt{n}) > 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) واستنتج أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$

ج- حدد إشارة $f_n(-\ln(n))$. واستنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n}$

د- تحقق أن $\frac{a_n}{\ln n} = -1 + \frac{\ln(-a_n)}{\ln n}$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) ثم استنتج أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{\ln n} = -1$