

الدالة الأسية النبرية

التمرين الأول

أحسب النهايات التالية :

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(e^x - 1)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x^2}} - e^{\frac{2}{x}} \right)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - 2x^2 - 3 \ln x$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln(e^{2x} - 1)$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x \ln x}}{x+1}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{e^x - 1}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{\sqrt{e+1}} - e^{\sqrt{x}})$	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(e^x - 1)}{x}$

التمرين الثاني

ليكن m عددا حقيقيا موجبا قطعاً . ونعتبر الدالة f_m المعرفة بما يلي : $f_m(x) = \frac{e^x - me^{-x}}{e^x + me^{-x}}$

- (1) ما هي D مجموعة تعريف الدالة f_m
- (2) أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_m) للدالة f_m
- (3) أدرس تغيرات الدالة f_m
- (4) بين أن (C_m) يقبل نقطت انعطاف يتم تحديدها
- (5) أرسم المنحنى (C_1)
- (6) بين أن f_m يقبل دالة عكسية و عرفها

التمرين الثالث

نعتبر الدالة العدرية f المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ و $f(0) = 1$

- (1) أ- أدرس اتصال الدالة f على $[0, +\infty[$
ب- بين أن f قابلة لاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$ و أحسب المشتقة $f'(x)$
- (2) ليكن a من المجال $]0, +\infty[$ و نضع $h(x) = \frac{e^a - 1 - a}{a^2} x^2 - e^x + 1 + x$
أ- بين أن $\frac{e^a - 1 - a}{a^2} = \frac{e^c - 1}{2c}$ $(\exists c \in]0, a[)$
ب- استنتج أن f قابلة للاشتقاق على $x_0 = 0$ و حدد $f'_d(0)$
- (3) أرسم منحنى الدالة f

التمرين الرابع

ليكن n عددا طبيعيا من $\mathbb{N}^*$ و نعتبر الدالة f_n المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي : $f_n(x) = x^n (e^x - 1)$

- (1) أحسب النهايات $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$
- (2) أحسب المشتقة و ضع جدول تغيرات الدالة f_n
- (3) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1})
- (4) أرسم المنحنيين (C_1) , (C_2)
- (5) أ- بين أن المعادلة $f_n(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا a_n و أن $\ln 2 < a_n < 1$
ب- ادرس رتبة المتتالية $(a_n)_n$ و استنتج أنها متقاربة ثم بين أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$

الدالة الأسية النبرية

التمرين الخامس

نعتبر الدالة العدرية f المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = (x+1)e^{-\frac{x}{2}}$

(1) أ- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

ب- أدرس منحنى تغيرات الدالة f و ضع جدول تغيراتها

(2) أدرس تقع المنحنى (C_f) و أرسمه

(3) بين أن $(\forall x \in [0, +\infty[) |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

(4) بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α و أن $1 < \alpha < 2$

(5) لتكن $(U_n)_n$ المتتالية العدرية المعرفة بما يلي : $U_0 = 0$ و $U_{n+1} = f(U_n)$

أ- بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) 0 \leq U_n < 2$

ب- بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$

ج- بين أن $(U_n)_n$ متقاربة و أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$

التمرين السادس

(I) لتكن f و g الدالتين المعرفتين بما يلي : $f(x) = 4xe^{-x \ln 2} - 2$ و $g(x) = \frac{\ln(2x)}{x}$

(1) أ- أحسب نهايتي f عند $+\infty$; $-\infty$

ب- حدد الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C_f)

(2) أ- بين أن $(\forall x \in \mathbb{R}) f'(x) = 4(1 - x \ln 2)e^{-x \ln 2}$

ب- أنجز جدول تغيرات الدالة f

(3) أدرس الدالة g (النهايات , الفرع اللانهائي , التغيرات)

(4) أرسم المنحنيين (C_f) و (Γ_g) في نفس المعلم (نأخذ $\ln 2 \approx 0,7$; $e \approx 2,7$; $\frac{1}{\ln 2} \approx 1,4$; $e^{-1} \approx 0,4$)

(II) ليكن k عددا حقيقيا بحيث $0 < k < \frac{2}{e}$

(1) أ- تحقق أن المعادلة $g(x) = k$ تقبل حلين مختلفين α ; β بحيث $\frac{1}{2} < \alpha < \beta$

ب- حدد قيمة العدد k بحيث يكون العدرين α ; β هما حلا المعادلة $f_k(x) = 0$ حيث

$$f_k(x) = 4xe^{-kx} - 2$$

(2) أ- تأكد أن $(\forall x \in \mathbb{R}) f'_k(x) = 4(1 - kx)e^{-kx}$

ب- أعط جدول تغيرات الدالة f_k

(3) أ- استنتج أن المعادلة $f_k(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين a ; b بحيث $a < \frac{1}{k} < b$

الدالة الأسية النبرية

التمرين السابع

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x) = xe^{\frac{2x}{x^2-1}}$

(1) حدد D مجموعة تعريف الدالة f

(2) أ- بين أن $f\left(\frac{1}{x}\right)f(x) = 1$: $(\forall x \in D - \{0\})$

ب- استنتج العلاقة التي تربط $f'(x)$ و $f'\left(\frac{1}{x}\right)$

ج- بين أنه إذا كان α جذر المعادلة $f'(x) = 0$ فإن العدد $\frac{1}{\alpha}$ جذر المعادلة $f'\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

(3) أ- بين أن $f'(x) = \frac{g(x)}{(x^2-1)^2} e^{\frac{2x}{x^2-1}}$ حيث $g(x)$ دالة حدودية يتم تحديدها

ب- تحقق أن $\forall x \neq 0 : x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = x^2 \left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 4 \right]$

ج- أدرس إشارة $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f

(4) لتكن h الدالة المعرفة كما يلي : $\begin{cases} h(x) = f(x) & x \in D \\ h(1) = h(-1) = 0 \end{cases}$

أ- بين أن h متصلة على يسار 1 و على يسار -1

ب- بين أن $\forall x \in D : \frac{h(x)}{x-1} = \frac{x+1}{2} \left(\frac{2x}{x^2-1} \right) e^{\frac{2x}{x^2-1}}$

ج- أحسب $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{h(x)}{x-1}$ ماذا تستنتج ؟

د- هل f قابلة للاشتقاق على يسار -1

(5) أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C_f) عند $+\infty$; $-\infty$

(6) أرسم منحنى الدالة h

التمرين الثامن

أجزاء (1) : نعتبر الدالة g المعرفة بما يلي : $g(x) = \frac{2-x}{x-1} + \ln\left(\frac{x-1}{x^2}\right)$

(1) أدرس تغيرات الدالة g على المجال $]1, +\infty[$

(2) أ- بين أن : $g(c) = 0$: $\exists ! c \in \left] \frac{4}{3}, \frac{3}{2} \right[$

ب- استنتج إشارة $g(x)$

الدالة الأسية النيريت

$$\begin{cases} f(x) = e^{\frac{x-1}{x^2}} - 1 & ; x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[\\ f(0) = -1 \\ f(x) = e^{x \ln\left(\frac{x-1}{x^2}\right)} & ; x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

الجزء (2): لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

(1) أحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و استنتج الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C_f)

(2) بين أن f متصلة في كل من النقطتين $x_0 = 0$ و $x_1 = 1$

(3) أ- تحقق أن $\frac{f(x)}{x-1} = e^{(x-1)\ln(x-1)-2x \ln x}$ ($\forall x \in]1, +\infty[$) و أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على $x_1 = 1$

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يسار $x_1 = 1$

ج- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين و على يسار النقطة $x_0 = 0$

(4) بين أن $\begin{cases} f'(x) = \frac{2-x}{x^3} e^{\frac{x-1}{x^2}} & ; x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[\\ f'(x) = g(x)f(x) & ; x \in]1, +\infty[\end{cases}$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f

(5) أرسم المنحنى (C_f) (نأخذ $e^{\frac{1}{4}} = 1,3$ و $c = 1,4$ و $f(c) = 0,13$)

التمرين التاسع

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي : $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$

(1) أحسب نهايات f عند محداث مجموعة تعريفها

(2) أدرس تغيرات الدالة f

(3) أ- أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f)

ب- أرسم المنحنى (C_f)

(II) لتكن $(U_n)_n$ المتتالية المعرفة بما يلي : $U_0 = 1$ و $U_{n+1} = U_n^2 f(U_n) = U_n e^{-U_n}$

(1) بين أن $e^x \geq x + 1$ ($\forall x > 0$)

(2) استنتج أن $x^2 f(x) \leq \frac{x}{x+1}$ ($\forall x > 0$)

(3) أ- باستعمال برهان بالترجع بين أن $0 < U_n < \frac{1}{n+1}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

ب- بين أن $(U_n)_n$ متقاربة وحدد نهايتها

(4) نضع $V_n = \sum_{k=0}^{n-1} U_k$ لكل n من $\mathbb{N}^*$.

أ- بين أن $V_n = \ln\left(\frac{1}{U_n}\right)$

ب- حدد نهاية المتتالية $(V_n)_n$