دوال أسية

التمرين الأول :

أحسب ما يلي :

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}(x+1)e^{\frac{1}{x+1}}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+x-1\right)e^{-2x}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)e^{x-1}-x$	$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-(x-1)e^x+5$
$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}e^{\frac{1}{x}}-\frac{2}{\sqrt{x}}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x\ln x}}{x}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{3}{2x}}-1\right)$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{e^x-1}$
$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{e^x-e^{-x}}{\sqrt{x}}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^x-1\right)}{x}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x\ln\left(1+x^2\right)$

التمرين الثاني :

حدد مشتقة الدالة في الحالات التالية :

$f(x)=\frac{e^{2x}-1}{x^2+1}$	$f(x)=x^2e^{3x}$	$f(x)=(2x+1)e^{-2x}$
$f(x)=e^x\ln x$	$f(x)=\frac{e^{2x}+1}{2e^{2x}+3}$	$f(x)=2x-2\ln\left(1+e^x\right)$
$f(x)=x^2e^{\frac{1}{x}}$	$f(x)=\left(\sqrt{x}\right)^x$	$f(x)=\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$

التمرين الثالث :

ليكن n عدد طبيعي غير منعدم . نعتبر الدالة f_n المعرفة بما يلي : $f_n(x)=xe^x-n$

1) أ- أحسب نهايتي الدالة f_n

ب- أدرس تغيرات الدالة f_n و ضع جدول تغيراتها

2) بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل في $]0,+\infty[$ حلا وحيدا نرمز له a_n

3) أ- بين أن المتتالية $(a_n)_n$ تزايدية

ب- بين أن $f_n\left(\frac{\ln(n)}{2}\right)<0$ $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$ و استنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=+\infty$

ج- حدد إشارة $f_n(\ln(n))$ حيث $n\geq3$. و استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}$

التمرين الرابع :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0,1]$ بما يلي : $f(x)=1-x^2e^{1-x^2}$

1) أ- بين أن f قابلة للاشاقاق على $[0,1]$ و أن : $f'(x)=2x\left(x^2-1\right)e^{1-x^2}$

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f

ج- استنتج ان f تقابل من $[0,1]$ نحو مجال يتم تحديده

2) ليكن n عددا طبيعيا و بحيث $n\geq2$.

أ- بين أن المعادلة $nf(x)=1$ تقبل حلا وحيدا نرمز اه بالرمز a_n

ب- بين أن المتتالية $(a_n)_n$ تزايدية و استنتج أنها متقاربة

ج- أحسب النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

التمرين الخامس :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $x>0 \;;\; f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$ و $f(0)=0$

1) أ- بين أن f متصلة على يمين النقطة $x_0=0$

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين النقطة $x_0=0$

2) أدرس تغيرات الدالة f و ضع جدول تغيراتها

3) لتكن $(U_n)_n$ متتالية عددية معرفة كما يلي : $U_0=3$ و $U_{n+1}=f(U_n)$

أ- بين أن $0\le U_n\le 1$ $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$

ب- بين أن المتتالية $(U_n)_n$ تناقصية و استنتج أنها متقاربة

4) أ- بين أن $e^t\ge 1+t$ $(\forall t\ge 0)$

ب- استنتج أن $e^{-\frac{1}{x^2}}\le \frac{1}{2}x$ $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\right)$

ج- بين أن $U_n\le 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ و حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

التمرين السادس :

ليكن n عددا من $\mathbb{N}^*$ و نعتبر الدالة f_n المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $f_n(x)=\dfrac{x-n}{x+n}-e^{-x}$

1) دراسة الدالة f_1 و تمثيلها (نأخذ $\left(f_1(1,54)\simeq 0\right)$)

2) أ- أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$

ب- أحسب $f_n'(x)$ أدرس منحى تغيرات الدالة f_n

ج- بين بالترجع أن $e^{n+1}\ge 2n+1$ $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$ و حدد إشارة $f_n(n+1)$

د- بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α_n و أن $\alpha_n\in\,]n,n+1[$

ه- حدد النهايتين $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\alpha_n}{n}$

3) بين أن القيمة المتوسطة للدالة f_n على المجال $[0,\alpha_n]$ تكتب $\beta_n=1-\dfrac{1}{\alpha_n}+\dfrac{e^{-\alpha_n}}{\alpha_n}-\dfrac{2n}{\alpha_n}\ln\left(1+\dfrac{\alpha_n}{n}\right)$

أحسب النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty}\beta_n$

التمرين السابع :

الجزء (1) نعتبر الدالة g المعرفة بما يلي : $g(x)=1-x-e^{-2x}$

1) أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2) أ- أحسب المشتقة $g'(x)$ أدرس منحى تغيرات الدالة g على المجال $[0,+\infty[$

ب- أنجز جدول التغيرات على $[0,+\infty[$ و بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في $]0,+\infty[$ حلا وحيدا a و أن $\ln\sqrt{2}<a<1$

3) استنتج إشارة $g(x)$

الجزء (2) لتكن f الدالة العددية المعرفة عل المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1}$

1) أ- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و أن $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=+\infty$

ب- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C) عند $+\infty$

2) أ- أحسب $f'(x)$ و بين أن $f'(x)=\dfrac{e^{\frac{2}{x}}g\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1}}$

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f

3) تحقق أن $f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\sqrt{\dfrac{1}{a-a^2}}$

4) أ- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم $y=x$ (Δ)

ب- أرسم المنحنى (C) (نأخذ $\dfrac{1}{a}\simeq1,25$ و $f\left(\dfrac{1}{a}\right)\simeq2,5$)

الجزء (3) نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0=4$ و $U_{n+1}=f(U_n)$

1) بين أن $U_n>\dfrac{1}{\ln\sqrt{2}}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

2) أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$ و استنتج أنها متقاربة

3) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

التمرين الثامن :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

1) أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

2) أحسب الدالة $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f

3) بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $]-1,1[$

4) أعط معادلة المماس للمنحنى (C_f) في النقطة 0

5) أرسم (C_f) منحنى الدالة f و المنحنى (Γ) للدالة العكسية f^{-1}

6) أ- بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*-\{1\}$ المعادلة $f(x)=\dfrac{1}{n}$ تقبل في $[0,+\infty[$ حلا وحيدا x_n

ب- أدرس رتابة المتتالية $(x_n)_{n>1}$ و استنتج أنها متقاربة ثم حدد النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$