

الدوال الأسية

تمارين رقم 1

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = \ln(e^x - e^{-x})$

$$(1) \text{ أ. أحسب النهايتين } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ ; } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$$

ب. أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

ج. أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمقارب المائل

(2) أدرس منحنى تغيرات الدالة f ثم أنجز جدول تغيراتها

(3) ليكن n عدد من $\mathbb{N}$. نعتبر المعادلة $f(x) = n$ (E_n)

أ. بين أن المعادلة (E_n) تقبل حلا وحيدا x_n

ب. أدرس رتابة المتتالية $(x_n)_n$

ج. قارن x_n و n ثم استنتج أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n - n$

(4) أ. بين أن f تقابل من $]0, +\infty[$ نحو مجال يتم تحديده وعرف الدالة العكسية f^{-1}

ب. حل المعادلة $e^{2x} - e^{x+y} - 1 = 0$ حيث x هو المجهول

ج. استنتج أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n - n$ و حدد مرة ثانية $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_n = \ln\left(\frac{1}{2}e^n + \frac{1}{2}\sqrt{e^{2n} + n}\right)$

تمارين رقم 2

(I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = x - e^{-x}$

$$(1) \text{ أ. أحسب النهايتين } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ ; } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

(2) أدرس منحنى تغيرات الدالة f واستنتج أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α وأن $\alpha \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right[$

(3) استنتج إشارة $f(x)$

(II) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x) = \frac{x+1}{e^x + 1}$

(1) أ. أحسب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة

ب. بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = 0$ ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة

$$(2) \text{ أ. بين أن } g'(x) = \frac{-e^x f(x)}{(e^x + 1)^2} \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

ب. ضع جدول تغيرات الدالة g

(3) بين أن المعادلة $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = x$

(4) ارسم المنحنى (C_g) (نأخذ $\alpha \approx 0,57$)

(III) نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0 = 0$ و $U_{n+1} = f(U_n)$

(1) بين أن $0 \leq U_n \leq \alpha$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

(2) بين أن المتتالية $(U_n)_n$ تزايدية واستنتج أنها متقاربة

(3) حدد نهاية المتتالية $(U_n)_n$

تمارين رقم 3

- ليكن k عددا حقيقيا بحيث $0 < k < e$
- (A) نعتبر الدالة f_k المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f_k(x) = (2-x)e^x - k$
- 1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x)$
- 2) أحسب المشتقة $f'_k(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f_k . أحسب $f_k(1)$
- 3) أ. بين أن المعادلة $f_k(x) = 0$ تقبل حلين مختلفين α_k ; β_k وأن $\alpha_k < 1 < \beta_k$
 ب. بين أن $(e^{\alpha_k} - k)(\alpha_k - 1) = e^{\alpha_k} - k\alpha_k$ حدد العلاقة التي تحققها β_k
- 4) حدد إشارة $f_k(x)$
- (B) نعتبر الدالة g_k المعرفة كما يلي : $g_k(x) = \frac{e^x - k}{e^x - kx}$ و (C_k) منحنى الدالة
- 1) أ. أدرس منحنى تغيرات الدالة $u(x) = e^x - kx$
 ب. استنتج أن $e^x - kx > 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}$) (نذكر $0 < k < e$)
- 2) أ. أحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow -\infty} g_k(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_k(x)$
 ب. بين أن $g'_k(x) = \frac{kf'_k(x)}{(e^x - kx)^2}$
 ج. أحسب $g_k(1)$ ثم أنجز جدول تغيرات الدالة g_k
- 3) لتكن M_k و N_k نقطتي المنحنى (C_k) والتين أفصولهما α_k و β_k على التوالي
 أ. بين أن $g(\alpha_k) = \frac{1}{\alpha_k - 1}$ و حدد $g(\beta_k)$
 ب. بين مما سبق أن M_k و N_k تنتميان لمنحنى ثابت يتم تحديد معادلته له
 ج. أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) ; (C_2)
- 4) أ. بين أن $\alpha_2 = 0$
 ب. أرسم المنحنيين (C_1) ; (C_2) في نفس المعلم (نأخذ $\beta_2 = 1,6$; $\beta_1 = 1,8$; $\alpha_1 = -1,1$)

تمارين رقم 4

- الجزء (1) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $g(x) = \frac{1-e^{-x}}{x}$ و $g(0) = 1$
- 1) بين أن g متصلة في النقطة $x_0 = 0$
- 2) نضع $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad h(t) = 1 + \frac{t^2}{2} - t - e^{-t}$
 أ. بين أن $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad 0 \leq h''(t) \leq t$
 ب. استنتج أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad x - \frac{x^2}{2} \leq 1 - e^{-x} \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$
- 3) بين أن g قابلة للاشتقاق على يمين $x_0 = 0$
- 4) أدرس منحنى تغيرات الدالة g
- الجزء (2) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$ و $f(0) = 1$
- 1) أ. أدرس اتصال الدالة f على يمين $x_0 = 0$
 ب. بين أن f قابلة للاشتقاق على يمين $x_0 = 0$ وأن $f'_d(0) = -\frac{3}{2}$ (لاحظ أن $f(x) = 2g(2x) - g(x)$)

$$(2) \text{ أ. بين أن } (\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) \quad f'(x) = \frac{2x+1-(x+1)e^x}{x^2 e^{2x}}$$

ب. بين أن $e^x \geq x+1$ ($\forall x \in \mathbb{R}^+$) و استنتج أن f تناقصية على $\mathbb{R}^+$ ثم أنجز جدول التغيرات

(3) أرسم المنحنى (C_f)

الجزء (3) لتكن F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$

(1) بين أن $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) \quad xf(2x) \leq F(x) \leq xf(x)$ وأحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

(2) بين أن F قابلة للاشتقاق في 0 وأعط معادلة المماس لمنحنى الدالة F في النقطة ذات الأفصول 0

(3) أ. بين أن F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^+$ أحسب $F'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}^+$

ب. أدرس رقابة الدالة F

تمارين رقم 5

ليكن n عددا طبيعيا بحيث $n \geq 2$. نضع $g_n(x) = n(1 - e^{-x}) - x$ ونعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي

$$f_n(0) = 0 \text{ و } f_n(x) = \frac{x^n}{e^x - 1} ; x \neq 0 :$$

(I) (1) أحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow -\infty} g_n(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x)$

(2) أحسب المشتقة $g'_n(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة g_n

(3) أ. بين أن $x - 1 \geq \ln x$ ($\forall x \in]0, +\infty[$) واستنتج إشارة $g_n(\ln n)$

ب. بين أن المعادلة $g_n(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما $a = 0$ والثاني β_n موجب قطعاً. أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n$

ج. استنتج إشارة $g_n(x)$

(II) (1) أ. أحسب النهاية $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ (ناقش حسب زوجية العدد n)

ب. أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_n) عند $-\infty$

ج. أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_n) عند $+\infty$

(2) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f_n في النقطة $x_0 = 0$

$$(3) \text{ أ. بين أن } (\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad f'_n(x) = \frac{x^{n-1}e^x g_n(x)}{(e^x - 1)^2}$$

ب. أنجز جدول تغيرات كل من الدالتين f_2 ; f_3

(4) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_2) ; (C_3)

(5) أرسم المنحنيين (C_2) ; (C_3) (نأخذ $\beta_2 \approx 1,52$; $\beta_3 \approx 2,82$ و $f_2(\beta_2) \approx 0,65$; $f_3(\beta_3) \approx 1,42$)

(III) لتكن F_n قصور الدالة f_n على المجال $I = [0, 1]$

(1) بين أن F_n تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده

(2) بين أن المعادلة $F_n(x) = \frac{1}{2}$ تقبل حلاً وحيداً نرمز له بالرمز U_n

(3) تحقق أن $F_{n+1}(U_n) = \frac{1}{2}U_n$ واستنتج أن المتتالية $(U_n)_n$ تزايدية

(4) أ. بين أن $U_2 > \frac{1}{2}$ وبين أن $2U_n \geq \frac{1}{2}$ (نأخذ $\sqrt{e} \geq \frac{3}{2}$)

ب. بين أن $-\frac{2 \ln 2}{n} \leq \ln U_n$ وأحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln U_n)$ واستنتج نهاية المتتالية $(U_n)_n$