التمرين رقم 1

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f\left(x\right)=\sqrt{1-e^{-2x}}$

1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f

2) أ-- بين أن $\frac{f\left(x\right)}{x}=\sqrt{\frac{2}{x}\left(\frac{e^{-2x}-1}{-2x}\right)}$, $\left(\forall x\in D_f-\left\{0\right\}\right)$

ب-- أدرس قابلية إشتقاق f على يمين 0 و أعط تأويلا هندسيا للنتيجة

3) أدرس تغيرات الدالة f

4) أرسم المنحنى $\left(C_f\right)$

5) أ-- بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} محددا مجموعة تعريفها J و أحسب $f^{-1}\left(x\right)$

ب-- أرسم في نفس المعلم منحنى الدالة العكسية

6) نعتبر المتتالية المعرفة بما يلي : $n\in\mathbb{N}^*$ $U_{n+1}=\sqrt{U_n^2+\frac{1}{e^{2n}}}$ و $U_1=1$

و نضع $V_n=U_n^2-U_{n-1}^2$ $\left(\forall n\geq 2\right)$

أ-- بين أن $\left(V_n\right)_n$ متتالية هندسية محددا أساسها

ب-- أحسب بدلالة n الجمع $S_n=V_2+V_3+.....+V_n$

ج-- إستنتج أن $U_n=\frac{f\left(n\right)}{f\left(1\right)}$ ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

التمرين رقم 2

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $x\neq 0$; $f(x)=\ln\left(e^x-e^{\frac{1}{x}}\right)$ و $f(0)=0$

1) بين أن مجموعة تعريف f هي $D=\left]-1,0\right]\cup\left]1,+\infty\right[$

2) أ- بين أن f متصلة على يسار 0

ب- أدرس قابلية إشتقاق الدالة f على يسار 0

3) أحسب النهايتين $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}f(x)$

4) أ- تحقق أن $(\forall x>1)$ $f(x)=x+\ln\left(1-e^{\frac{1}{x}-x}\right)$.

ب- إستنتج أن المستقيم $y=x$: (Δ) مقارب مائل للمنحنى $\left(C_f\right)$

5) أحسب المشتقة $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f

6) أ- بين المنحنى $\left(C_f\right)$ يقطع محور الأفاصيل في نقطة إفصولها α ينتمي إلى المجال $\left]1,2\right[$

ب- أرسم المنحنى $\left(C_f\right)$ (نأخذ $\alpha\simeq 1,2$)

التمرين رقم 3

ليكن n عددا طبيعيا بحيث $n\geq 3$. نعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f_n(x)=e^{-nx}-x$

1) أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f_n(x)$

2) أحسب المشتقة $f_n'(x)$ و أنجز جدول التغيرات

3) بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α_n و بين أن α_n ينتمي للمجال $\left]0,1\right[$

4) أ- أدرس إشارة الفرق $f_{n+1}(x)-f_n(x)$

ب- بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 3}$ تناقصية

ج- إستنتج أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 3}$ متقاربة و بين أن $\lim_{n\to+\infty}\alpha_n = 0$

التمرين رقم 4

الجزء الأول :

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=-\frac{1}{x}+e^{\frac{1}{x}}$

1. أحسب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$
2. بين أن $\lim_{x\to 0^+} g(x)=+\infty$ يمكنك وضع $t=\frac{1}{x}$
3. إدرس تغيرات الدالة g ثم ضع جدول تغيراتها
4. حدد إشارة $g(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$

الجزء الثاني : نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=-\frac{1}{x}-\ln x+xe^{\frac{1}{x}}$

و ليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
2. بين أن $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ يمكنك وضع $t=\frac{1}{x}$. ماذا تستنتج ؟
3. أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$
4. أ- بين أن : $(\forall x>0) : f'(x)=\frac{(x-1)g(x)}{x}$.

   ب- ضع جدول تغيرات الدالة f
5. أنشئ المنحنى (C_f)

التمرين رقم 5

الجزء(1) لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=\frac{x+2}{x+1}+\ln|x+1|$

5) أ- حدد D مجموعة تعريف الدالة f و أحسب النهايتين $\lim_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

ب- أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C_f) عند $-\infty$ و $+\infty$

2) أحسب $\lim_{\substack{x\to-1\\ x<-1}} f(x)$ و $\lim_{\substack{x\to-1\\ x>-1}} f(x)$

3) أحسب المشقة $f'(x)$ و أدرس تغيرات الدالة f

4) أ- أدرس تقعر المنحنى (C_f)

ب- أرسم المنحنى (C_f) (لاحظ أن $f(-2)=0$)

5) إستنتج إشارة $f(x)$

الجزء(2) : نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\begin{cases} g(x)=e^{(x+2)\ln|x+1|} & , \quad x\neq -1 \\ g(-1)=0 \end{cases}$

5) أ- بين أن g متصلة في النقطة $x_0=-1$

ب- أدرس قابلية إشتقاق الدالة g في $x_0=-1$

5) أ- أحسب النهايتين $\lim_{x\to-\infty} g(x)$; $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

ب- أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (Γ_g) عند $-\infty$ و $+\infty$

3) أحسب $g'(x)$ و أدرس تغيرات الدالة g ثم أعط جدول تغيرات الدالة g

4) أرسم المنحنى (Γ_g)

5) ناقش حسب قيم البارامتر m عدد حلول المعادلة $|x+1| = m^{\frac{1}{x+2}}$

التمرين رقم 6

ليكن n عددا من $\mathbb{N}^*$ و $a_1 ; a_2 ; .....; a_n$ أعداد حقيقية موجبة قطعا .

نضع $A_n = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$ و $G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 .... a_n}$

1) بين أن $e^x \geq x+1$ $(\forall x \in \mathbb{R})$

2) بين أن $e^{\frac{a_k}{A_n}-1} \geq \frac{a_k}{A_n}$ $(\forall k \in \{1;2;...;n\})$ و إستنتج أن $\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 .... a_n}$

التمرين رقم 7

لتكن f الدالة المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$ و نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ بحيث : $U_0 = \frac{1}{2}$ و $U_{n+1} = f(U_n)$

1) أحسب $f'(x)$ و أدرس منحى تغيرات الدالة f على المجال $[0,+\infty[$

2) أ- بين أن $f([0,1]) \subseteq [0,1]$

ب- $(\forall x \in [0,1])$ $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}$

ج- بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل في المجال $[0,1]$ حلا وحيدا α

3) أ- بين أن $0 \leq U_n \leq 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ب- بين أن $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|U_n - \alpha|$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ج- بين أن المتتالية $(U_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها

التمرين رقم 8

الجزء (1) نعتبر الدالة g المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $g(x) = (2-x)e^x - 2$

1) أحسب النهاية $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

2) أ- أحسب المشتقة $g'(x)$ و أنجز جدول تغيرات الدالة g

ب- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $]0,+\infty[$ حلا وحيدا α و أن $1 < \alpha < 2$

ج- إستنتج أن $g(x) \geq 0$ على المجال $]0,\alpha]$ و أن $g(x) \leq 0$ على المجال $[\alpha,+\infty[$

الجزء (2) لتكن f الدالة المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{e^x - 1}}$; $x > 0$ و $f(0) = 0$

أ- بين أن f متصلة على يمين $x_0 = 0$

ب- أدرس قابلية إشتقاق الدالة f على يمين $x_0 = 0$

2) أحسب النهاية $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و أعط تأويلا هندسيا للنتيجة

3) أ- بين أن $f'(x) = \frac{g(x)}{2\sqrt{(e^x - 1)^3}}$

ب- بين أن $f(\alpha) = \sqrt{\frac{2\alpha}{e^\alpha}}$ و أنجز جدول تغيرات الدالة f

4) تحقق أن $f(x)-x=\frac{(e^{x}-2)}{\sqrt{e^{x}-1}+1}f(x)$ ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم $y=x$ (Δ)

5) أرسم المنحنى (C_f) (نأخذ $\alpha\simeq 1,59$ و $f(\alpha)\simeq 0,8$)

الجزء (3) لتكن h قصور الدالة f على المجال $[\alpha,+\infty[$

1) بين أن h تقبل دالة عكسية h^{-1} معرفة على مجال يتم تحديده

2) ليكن n عدد طبيعي بحيث $n\geq 2$.

أ- بين أن المعادلة $h(x)=\frac{1}{n}$ تقبل في $[\alpha,+\infty[$ حلا وحيدا β_n

ب- أدرس رتابة المتتالية $(\beta_n)_{n\geq 2}$

ج- بين أن $(\forall n\geq 2)$ $\beta_n\geq \ln(n+1)$ ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty}\beta_n$

التمرين رقم 9

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0,1]$ بما يلي : $f(x)=2xe^{x}$

1) أ- بين أن f تقابل من المجال $[0,1]$ نحو مجال J يتم تحديده

ب- لتكن f^{-1} تقابله العكسي . أعط جدول تغيرات الدالة f^{-1}

2) بين أنه يوجد عدد وحيد α في المجال $]0,1[$ بحث $\alpha e^{\alpha}=1$

3) نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ بحيث : $U_0=\alpha$ و $U_{n+1}=f^{-1}(U_n)$

أ- بين أن بين أن $0<U_n\leq 1$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

ب- بين أن $f(x)\geq x$ $(\forall x\in[0,1])$ و إستنتج رتابة المتتالية $(U_n)_n$

ج- بين أن المتتالية $(U_n)_n$ متقاربة و أن $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=0$

4) لكل عدد صحيح طبيعي n نضع $S_n=\sum_{k=0}^{k=n}U_k$

أ- بين أن $U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n e^{-U_{n+1}}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

ب- إستنتج أن $U_n=\frac{e^{-S_n}}{2^n}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

ج- بين أن $U_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ و إستنتج أن $(S_n)_n$ متقاربة وأن نهايتها L تحقق $\alpha\leq L\leq 2$

التمرين رقم 10

ليكن n عددا طبيعيا من $\mathbb{N}^*$ و نعتبر الدالة f_n المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $f_n(x)=x+1-2ne^{-nx}$

1) أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)$ و أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_n) بجوار $+\infty$

2) أحسب المشتقة و ضع جدول تغيرات الدالة f_n

3) أ- بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل في المجال $]0,1[$ حلا وحيدا u_n

ب- بين أن $\frac{\ln n}{n}\leq u_n\leq\frac{\ln 2n}{n}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$