الثانية بكالوريا علوم رياضية	الدوال الأسية	الأستاذ : الحيان

التمرين 1 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي :

$$f(x)=\frac{2(e^x+1)}{e^x-1}$$

و ليكن (C) منحنى الدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. أ- حدد D حيز تعريف الدالة f .
ب- أحسب نهايات f عند محدات D .
ج- حدد مقاربات (C) .
2. بين أن f دالة فردية .
3. أحسب $f'(x)$ لكل x من D ؛ و استنتج تغيرات الدالة f .
4. أنشئ المنحنى (C) .
5. أ- تحقق من أن : $f(x)=-2+\dfrac{4e^x}{e^x-1}\quad ; \quad \forall x\in D$.
ب- استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]0,+\infty[$.
ج- أحسب مساحة السطح المستوي المحصور بين المنحنى (C) ومحور الأفاصيل و المستقيمين المحددين بالمعادلتين $x=\ln 2$ و $x=\ln 4$.

التمرين 2 :

لتكن الدالة العددية f المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=(2x-3)e^{\left(\frac{1}{x-1}\right)} & ; \quad x\neq 1 \\ f(1)=0 \end{cases}$$

و ليكن (C) منحنى الدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. أ- حدد D حيز تعريف الدالة f .
ب- أحسب نهايات f عند محدات D .
ج - حدد مقاربات (C) .
2. أ- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار في النقطة 1 ثم أعط تأويلا هندسيا لهذه النتيجة .
ب- بين أن : $f'(x)=\dfrac{2x^2-6x+5}{(x-1)^2}e^{\left(\frac{1}{x-1}\right)}\quad ; \quad \forall x\in IR-\{1\}$
ج - أعط جدول تغيرات الدالة f .
3 . أنشئ المنحنى (C) .

التمرين 3 :

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x)=x-\dfrac{1}{2}\ln\left|e^x-e^{-x}\right|$.

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. حدد D حيز تعريف الدالة f .
2. أ- أحسب النهايتين التاليتين : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
ب- بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
3. أ- بين أن : $f'(x)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{e^{2x}-3}{e^{2x}-1}\quad ; \quad \forall x\in D$.
ب- أدرس إشارة $f'(x)$.
ج - أعط جدول تغيرات f .
4. أ- بين أن : $f(x)-\dfrac{3}{2}x=-\dfrac{1}{2}\ln\left|e^{2x}-1\right|\quad ; \quad \forall x\in D$.
ثم استنتج أن المستقيم الذي معادلته $y=\dfrac{3}{2}x$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{C})$ بجوار $-\infty$.
ب- بين أن : $f(x)-\dfrac{1}{2}x=-\dfrac{1}{2}\ln\left|1-e^{-2x}\right|\quad ; \quad \forall x\in D$.
و استنتج أن المستقيم الذي معادلته $y=\dfrac{1}{2}x$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{C})$ بجوار $+\infty$.
5. أدرس تقعر المنحنى $(\mathcal{C})$.
6. أنشئ $(\mathcal{C})$.

التمرين 4 :

$\boxed{I}$ لتكن g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$g(x)=x+2Log(1-x)$$

1. ضع جدول تغيرات الدالة g على المجال $[0,1[$.
2. بين أن : $0<\dfrac{1}{2x-1}<1\quad ; \quad \forall x\in]1,+\infty[$.
3. استنتج أن : $\dfrac{1}{2x-1}+2Log\left(1-\dfrac{1}{2x-1}\right)<0\quad ; \quad \forall x\in]1,+\infty[$

$\boxed{II}$ نعتبر f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=(x-1)^2Log\left(1-\dfrac{1}{2x-1}\right) & ; \quad x>1 \\ f(x)=x(x-1)^2e^{2x} & ; \quad x\leq 1 \end{cases}$$

1. أ- حدد D حيز تعريف الدالة f .
ب- أدرس قابلية اشتقاق f في النقطة 1.
2. أ- بين أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3e^{2x}=0$ واستنتج $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (يمكن وضع : $t=-\dfrac{1}{2x-1}$)
3. أ - أحسب $f'(x)$ لكل $x<1$.
- تحقق أن : $\forall x\in]1,+\infty[\, ; f'(x)=(x-1)g\left(\dfrac{1}{2x-1}\right)$.
ب- حدد إشارة $f'(x)$ من أجل $x<1$ ثم من أجل $x>1$.
ج- ضع جدول تغيرات الدالة f .
4. ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$. نقبل أن المستقيم الذي معادلته : $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{8}$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.
أ- أعط معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة التي أفصولها 0 .
ب- أنشئ المنحنى (C) .
ج - بين أن الدالة العددية F للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $F(x)=\dfrac{1}{8}(4x^3-14x^2+18x-9)e^{2x}$ ؛ دالة أصلية للدالة f

على المجال $]-\infty,1]$.

د- أحسب مساحة الحيز المستوي الذي يحده المنحنى (C) . والمستقيمات المحددة بالمعادلات $x=-1$ و $x=1$ و $y=0$.

التمرين 5 :

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=(x-1)e^{\left(\frac{1}{x-1}\right)} & ; \quad x<1 \\ f(x)=x-1-\dfrac{\ln x}{x} & ; \quad x\geq 1 \end{cases}$$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد منظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. أ- أحسب : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- بين أن الدالة f متصلة في النقطة 1 .

2. أ- أدرس قابلية اشتقاق f في النقطة 1 .

ب- بين أن : $f'(x)=\dfrac{x-2}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}} \quad ; \quad \forall x\in]-\infty,1[$.

ج- تحقق أن f تزايدية قطعا على المجال $]1,+\infty[$.

د- أعط جدول تغيرات الدالة f .

3. أ- تحقق أن المستقيم (D) ذا المعادلة : $y=x-1$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$ ؛ ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (D) على $]1,+\infty[$.

ب- بين أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=0$ وأول النتيجة هندسيا .

4. أرسم (C) . (تحديد نقط الإنعطاف غير مطلوب ؛ ونقبل أن (C) يوجد تحت مقاربه على $]-\infty,1[$)

التمرين 6 :

لتكن الدالة العددية f المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=-x+(x-1)\ln(x-1) & ; \quad x>1 \\ f(x)=x-1-e^{x-1} & ; \quad x\leq 1 \end{cases}$$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد منظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. بين أن f متصلة في النقطة 1 .

2. أثبت أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ وأحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

3. بين أن : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\infty$ وأن : $f'_g(1)=0$ ، ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجتين .

4. أ- أحسب $f'(x)$ لكل x من $IR-\{1\}$, وأدرس إشارتها .

ب- استنتج أن الدالة f تزايدية على كل من المجالين $]-\infty,1]$ و $[2,+\infty[$, وتناقصية على $[1,2]$.

ج- كون جدول تغيرات الدالة f .

5. أثبت أن (C) يقبل محور الأراتيب كاتجاه مقارب و المستقيم المعرف بالمعادلة $y=x-1$ كمقارب مائل .

6. أ- بين أنه يوجد عدد α من المجال $]4,5[$ بحيث : $f(\alpha)=0$. (نأخذ : $\ln 3\approx 1,1$ و $\ln 2\approx 0,7$)

ب- أنشئ (C) .

7. أحسب مساحة الحيز المستوي المحصور بين (C) ومحور الأفاصيل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=2$ و $x=4$.

التمرين 7 :

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي :

$$f(x)=x\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد منظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. أ- بين أن f دالة زوجية .

ب- بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad : \quad e^{4x}+4xe^{2x}-1>0$.

ج- ضع جدول تغيرات الدالة f .

2. أ- حدد الفروع اللانهائية للمنحنى (C)؛ محددا الوضع النسبي للمنحنى (C) ومقاربه المائل .

ب- أنشئ (C) .

4. لتكن (u_n) و (v_n) و (w_n) المتتاليات المعرفة بما يلي :

$$\forall n\in\mathbb{N}: \quad u_n=\int_0^n\frac{x}{e^{2x}+1}dx \quad ; \quad v_n=\int_0^n\frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$$

$$w_n=\int_0^n\frac{x}{2e^{2x}}dx$$

أ- أحسب w_n , بدلالة n .

ب- أحسب v_n ؛ بدلالة n . (يمكن وضع $t=e^x$)

ج- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad w_n\leq u_n\leq v_n\leq\dfrac{\pi}{4}$.

د- بين أن (u_n) متتالية متقاربة .

هـ- نضع a_n مساحة الحيز من المستوى الذي يحده المنحنى (C) و المستقيمات المحددة بالمعادلات : $y=x$ و $x=0$ و $x=n$ حيث $n\in\mathbb{N}$. بين أن : $\dfrac{1}{4}\leq\lim\limits_{n\to+\infty}a_n\leq\dfrac{\pi}{2}$.

التمرين 8 :

لتكن الدالة العددية f المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=xe^{\frac{1}{x}}+1 & ; \quad x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد منظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. حدد D حيز تعريف الدالة f .

2. أ- أدرس اتصال f في النقطة 0 .

ب- بين أن f قابلة للإشتقاق على اليسار في النقطة 0 .

3. أدرس تغيرات الدالة f .

4. أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C) .

5. أنشئ المنحنى (C) .

التمرين 9 :

أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)e^{\frac{1}{x-1}}-x$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^x$

$\lim\limits_{x\to-\infty}x^3e^x$