

الدوال الأسية

1. الدالة الأسية النبيرية:

أ. تعريف:

الدالة العكسية للدالة $\ln$ تسمى الدالة الأسية النبيرية و نرمز لها ب : $\exp$

ملاحظة: $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) = e^x$

ب. نتائج :

$$\begin{cases} e^x = y \\ (x \in \mathbb{R}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(y) \\ (y > 0) \end{cases} \quad \diamond$$

$$\exp: \mathbb{R} \mapsto]0, +\infty[\quad \diamond$$

$$x \mapsto \exp(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: e^x > 0 \quad \text{و} \quad D_{\exp} = \mathbb{R} \quad \diamond$$

$\diamond$ ليكن x و y من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y \quad \bullet$$

$$e^x < e^y \Leftrightarrow x < y \quad \bullet$$

$$e^x \geq e^y \Leftrightarrow x \geq y \quad \bullet$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: \ln(e^x) = x \quad \diamond$$

$$\forall x > 0: e^{\ln x} = x \quad \diamond$$

$$e^1 = e \quad \text{و} \quad e^0 = 1 \quad \diamond$$

ج. العمليات :

ليكن x و y من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$e^x \times e^y = e^{x+y} \quad (1)$$

$$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} \quad (2)$$

$$\frac{1}{e^x} = e^{-x} \quad (3)$$

$$(e^x)^r = e^{rx} \quad (r \in \mathbb{Q}) \quad (4)$$

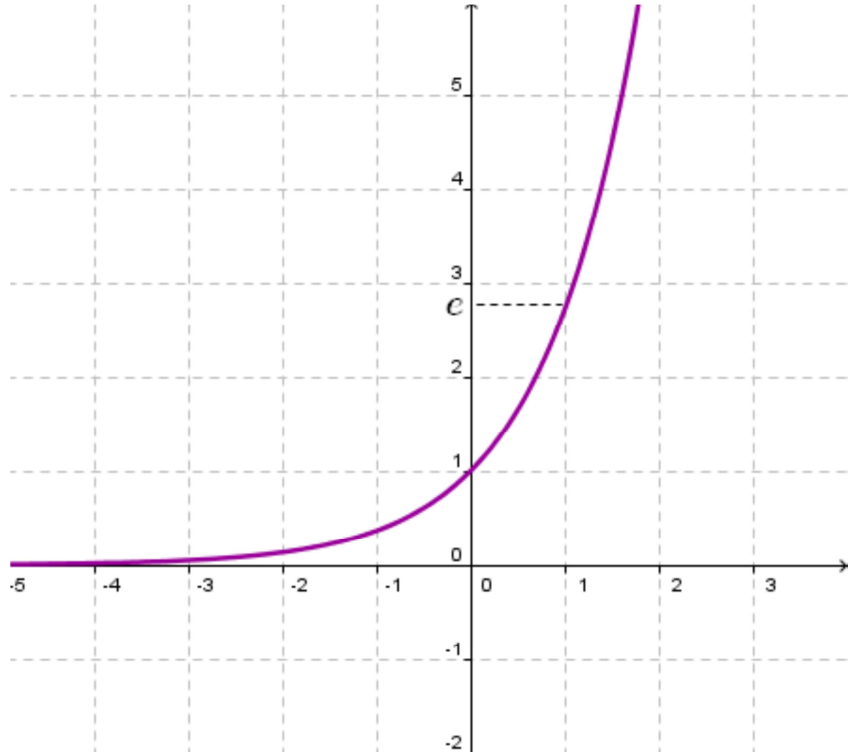
د. النهايات:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0^-$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = \begin{cases} 0^+ & n : \text{pair} \\ 0^- & n : \text{impair} \end{cases}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	

ه. الاشتقاق و الأصلية:

(1) الدالة exp قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا : $(e^x)' = e^x$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ (2) إذا كانت U دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $x \mapsto e^{U(x)}$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا : (3) $(\forall x \in I) (e^{rx})' = r e^{rx}$ (4)	
الأصلية	الدالة
e^x $\frac{1}{r} e^{rx}$ r $e^{U(x)}$	e^x e^{rx} $U'(x) e^{U(x)}$

و. التمثيل المبياني للدالة $\exp$



2. الدالة الأسية للأساس a حيث $a > 0$ و $a \neq 1$:

أ. تعريف :

الدالة الأسية للأساس a هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp_a(x) = a^x$

ب. نتائج :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp_a(x) = a^x = e^{x \ln a} \quad \diamond$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \ln(a^x) = x \ln a \quad \diamond$$

$$\begin{cases} \exp_a(x) = y \\ (x \in \mathbb{R}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_a(y) \\ (y > 0) \end{cases} \quad \diamond$$

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y \quad \diamond$$

ج. العمليات :

ليكن x و y من $\mathbb{R}$ لدينا :

$\frac{1}{a^x} = a^{-x} \quad \diamond$	$a^x \times a^y = a^{x+y} \quad \diamond$
$(a^x)^y = a^{xy} \quad \diamond$	$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad \diamond$

د. الاشتقاق و التغيرات :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (a^x)' = \ln a \times a^x$$

نتيجة :

- إذا كان : $a > 1$
فإن $\exp_a$ تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$
و لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp_a(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp_a(x) = +\infty$
- إذا كان : $0 < a < 1$
فإن $\exp_a$ تناقصية قطعاً على $\mathbb{R}$
و لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp_a(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp_a(x) = 0$