

التمرين الأول

[I] نعتبر الدالتين :

$$v(x) = x + \ln x ; u(x) = x - \ln x$$

(1) أ- أحسب $u'(x)$ و أدرس رتبة الدالة u

ب- استنتج أن $x - \ln x > 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$)

(2) أ- أحسب $v'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات v

ب- بين أن $v(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α و أن α

ينتمي إلى المجال $\left] \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right]$

(نأخذ $\ln 2 \approx 0,7$; $\ln 3 \approx 1,1$)

ج- استنتج إشارة الدالة $v(x)$

[II] لتكن f الدالة العددية المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \frac{x}{\ln x} + \frac{\ln x}{x}$$

(1) أ- بين أن $D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$

ب- أحسب نهايات الدالة f عند محداث D_f

(2) أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

(3) أ- بين أن :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{+*} - \{1\}) : f'(x) = \frac{(x^2 - \ln^2 x)(\ln x - 1)}{(x \ln x)^2}$$

ب- بين أن $f(\alpha) = -2$ و ضع جدول تغيرات f

(4) أرسم المنحنى (C_f) (نأخذ $\alpha \approx 0,57$)

التمرين الثاني

ليكن n عددا طبيعيا بحيث $n \geq 3$.

نعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}^{+*}$ بما يلي :

$$f_n(x) = nx + 2 \ln(x)$$

(1) أنجز جدول تغيرات الدالة f_n

(2) بين أن $\sqrt{x} \geq \ln(x)$ ($\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$)

(3) بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا a_n في $\mathbb{R}^{+*}$

(4) أدرس رتبة المتتالية $(a_n)_n$ و استنتج أنها متقاربة

(5) بين أن $\frac{1}{n} \leq a_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ و استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$

التمرين الثالث

(1) نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي :

$$U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

أ- بين أن :

$$(\forall x \in [1; +\infty[) \quad \frac{1}{x+1} \leq \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$$

ب- بين أن $U_n \geq \ln(n+1)$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) ثم

استنتج نهاية المتتالية $(U_n)_n$

(2) نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(\ln x)^2} & ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

أ- أحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

ب- أدرس قابلية اشتقاق f على يمين $x_0 = 0$

التمرين الرابع

الجزء (1) نعتبر الدالة g المعرفة على $]-1, +\infty[$ بما يلي

$$g(x) = \frac{x}{x+1} + \ln(x+1) :$$

(1) أحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$; $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} g(x)$

(2) أحسب $g'(x)$ و ضع جدول التغيرات ثم استنتج إشارة

الدالة $g(x)$ (لاحظ أن $g(0) = 0$)

الجزء (2) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]-1, +\infty[$

بما يلي : $f(x) = x \ln(x+1)$

(1) أ- أحسب النهايتين :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ; \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x)$$

ب- ادرس الفرع اللانهائي ل (C_f) عند $+\infty$

(2) بين أن $f'(x) = g(x)$ ($\forall x \in]-1, +\infty[$)

ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f

(3) أرسم المنحنى (C_f)

الجزء (3) ليكن n عددا طبيعيا بحيث $n \geq 2$

و ليكن h قصور الدالة f على المجال $[0, +\infty[$.

نعتبر المعادلة $nh(x) = 1$ (E_n)

(1) أ- بين أن h تقابل من $[0, +\infty[$ نحو مجال يتم

تحديده

ب- استنتج أن المعادلة (E_n) تقبل حلا وحيدا α_n و أن

$$0 < \alpha_n < 1$$

(2) أ- قارن $h(\alpha_n)$; $h(\alpha_{n+1})$

و بين أن $(\alpha_n)_n$ متتالية تناقصية

ب- استنتج أن $(\alpha_n)_n$ متتالية متقاربة

(3) أ- بين أن $\frac{x}{2} \leq \ln(x+1) \leq x$ ($\forall x \in [0,1]$)

ب- استنتج أن $\frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq x^2$ ($\forall x \in [0,1]$)

(4) بين أن $\sqrt{\frac{1}{n}} \leq \alpha_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}}$ ($\forall n \geq 2$)

استنتج النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$