

دالة لوغاريتم

التمرين الأول

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي : $x \neq 0$; $f(x) = x(\ln x)^2 - (x-1)^2$ و $f(0) = -1$

(1) أ- بين أن f متصلة على $[0, +\infty[$

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين النقطة 0

(2) أحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجتين

(3) أ- بين أن $\ln x \leq x - 1$ ($\forall x > 0$)

ب- أحسب $f'(x)$ و $f''(x)$ و تحقق أن $f'(1) = 0$

ج- استنتج إشارة $f'(x)$ وضع جدول تغيرات الدالة f

(4) أرسم منحنى الدالة f

التمرين الثاني

الجزء (1) لتكن g دالة بحيث $g(x) = x - (1+x)\ln(1+x)$

(1) حدد مجموعة تعريف g وأحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

(2) أحسب $g'(x)$ وضع جدول تغيرات الدالة g

(3) استنتج إشارة $g(x)$ (لاحظ أن $g(0) = 0$)

الجزء (2) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[-1, +\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)} & x \neq 0 ; x \neq -1 \\ f(0) = 1 & ; f(-1) = 0 \end{cases}$$

(1) أ- بين أن f متصلة في النقطة 0

ب- بين أن f متصلة على يمين النقطة -1

(2) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين النقطة -1

(3) أ- بين أن $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ ($\forall x \geq 0$) و أدرس قابلية اشتقاق f على يمين 0

ب- ليكن x من $]-1, 0[$

نعتبر الدالة φ المعرفة على $]-1, 0[$ بما يلي : $\varphi(t) = t^2(x - \ln(1+x)) - x^2(t - \ln(1+t))$

بين أن $\frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2(1+c)}$ ($\exists c \in]x, 0[$) و أدرس قابلية اشتقاق f على يسار 0

(3) أ- بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ب- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

(4) أ- بين أن $f'(x) = \frac{-g(x)}{(1+x)(\ln(1+x))^2}$; ($\forall x \in]-1, +\infty[- \{0\}$)

ب- أنجز جدول تغيرات الدالة f

(5) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم $y = x$ (Δ) ثم أرسم المنحنى (C_f)

التمرين الثالث

ليكن n عددا من $\mathbb{N}^*$. نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة بما يلي : $f_n(x) = nx + \ln x$

(1) أ- احسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$

دالة لوغاريتم

- (ب) أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_n) عند $+\infty$
- (2) أدرس منحنى تغيرات الدالة f_n وارسم المنحنى (C_1)
- (3) (أ) بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا u_n وبين أن $u_n < 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$)
(ب) بين أن $f_n(u_{n+1}) = -u_{n+1}$ واستنتج رتابة المتتالية $(u_n)_n$
- (4) (أ) بين أن $x > \ln x$ ($\forall x > 0$) واستنتج أن $u_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$)
(ب) حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n$ و بين أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nu_n}{\ln n} = 1$

التمرين الرابع

الجزء (1)

نعتبر الدالة g المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $g(x) = -\frac{1}{x+1} + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

(1) أحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

(2) بين أن $g'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$ وضع جدول تغيرات الدالة g

(3) استنتج أن $g(x) > 0$ ($\forall x > 0$)

الجزء (2)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$; $x \neq 0$ و $f(0) = 0$

(1) أ- بين أن الدالة f متصلة على يمين 0

ب- بين أن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة

(2) أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

(3) أحسب المشتقة $f'(x)$ و أدرس تغيرات الدالة f ثم أنجز جدول تغيراتها

(4) أرسم المنحنى (C_f)

الجزء (3)

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n>0}$ المعرفة بما يلي : $U_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ونضع $V_n = \ln U_n$

(1) أ- تحقق أن $V_n = f(n)$ واستنتج أن $(U_n)_n$ تزايدية

ب- بين أن $\ln(1+x) < x$ ($\forall x > 0$) واستنتج أن $U_n < e$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) ثم احسب نهاية المتتالية $(U_n)_{n>0}$

(2) نضع $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{V_k}{k}$ أحسب S_n بدلالة n ثم حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{\ln n}$

التمرين الخامس

لتكن f دالة عددية معرفة على $\left[0, \frac{1}{e}\right] \cup \left[\frac{1}{e}, +\infty\right]$ بما يلي : $f(x) = \frac{x}{1 + \ln x}$ و $f(0) = 0$

و ليكن (C_f) منحنائها في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(1) أ- بين أن f متصلة على يمين $x_0 = 0$

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين $x_0 = 0$

دالة لوجاريتم

$$(2) \text{ أحسب النهايتين } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}} f(x) \text{ و } \lim_{x > \frac{1}{e}} f(x)$$

$$(3) \text{ أ- أحسب النهاية } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

ب- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

$$(4) \text{ بين أن } f'(x) = \frac{\ln x}{(1 + \ln x)^2} \text{ ثم أنجز جدول تغيرات الدالة } f$$

$$(5) \text{ أرسم المنحنى } (C_f)$$

(6) ليكن n عدد طبيعي بحيث $n \geq 2$

$$(أ) \text{ بين أن المعادلة } f(x) = \sqrt{n} \text{ تقبل بالضبط حلين } u_n \text{ و } v_n \text{ بحيث } e^{-1} < u_n < 1 < v_n$$

$$(ب) (1) \text{ بين أن } v_n \geq \sqrt{n} \text{ ثم حدد } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

$$(2) \text{ بين أن } \sqrt{x} > 1 + \ln x \text{ (} \forall x \geq 16 \text{) واستنتج أن } v_n \leq n \text{ (} \forall n \geq 16 \text{)}$$

$$(3) \text{ بين أن } \ln v_n = \frac{1}{2} \ln n + \ln(1 + \ln v_n) \text{ (} \forall n \geq 2 \text{) واستنتج أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln v_n}{\ln n} = \frac{1}{2}$$

(ج) (1) بين أن $(u_n)_n$ تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة

$$(2) \text{ بين أن } u_n = e^{\frac{u_n}{\sqrt{n}} - 1} \text{ (} \forall n \geq 2 \text{) واستنتج أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^{-1} \text{ ثم بين أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} (u_n - e^{-1}) = e^{-2}$$

التمرين السادس

ليكن n عددا من $\mathbb{N}^*$. نعتبر الدالة f_n المعرفة بما يلي: $f_n(x) = x - n + \frac{n}{2} \ln x$

$$(1) \text{ أحسب النهايتين } \lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$$

$$(2) \text{ أحسب المشتقة } f'_n(x) \text{ وأنجز جدول تغيرات الدالة } f_n$$

$$(3) (أ) \text{ بين أن المعادلة } f_n(x) = 0 \text{ تقبل حلا وحيدا } u_n \text{ ثم بين أن } 1 \leq u_n < e^2 \text{ (} \forall n \in \mathbb{N}^* \text{)}$$

$$(ب) \text{ بين أن } f_n(u_{n+1}) = 1 - \frac{1}{2} \ln u_{n+1} \text{ وأدرس رقابة المتتالية } (u_n)_n$$

$$(ج) \text{ بين أن } \ln u_n = 2 - \frac{2}{n} u_n \text{ (} \forall n \in \mathbb{N}^* \text{)}$$

$$(د) \text{ أحسب } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} u_n \text{ واستنتج أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^2$$

$$(4) (أ) \text{ بين أن } e^{\frac{2}{n} u_n} - 1 = \frac{2e^d}{n} u_n \text{ (} \forall n \in \mathbb{N}^* \text{) (} \exists d > 0 \text{)}$$

$$(ب) \text{ استنتج أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} n(e^2 - u_n) \text{ ثم حدد } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{2}{n} u_n} - 1}{\frac{2}{n} u_n} \text{ (} \forall n \in \mathbb{N}^* \text{) } 1 \leq \frac{e^{\frac{2}{n} u_n} - 1}{\frac{2}{n} u_n} \leq e^{\frac{2e^2}{n}}$$