

## دالة لوغاريتم نبيرية

### التمرين الأول

أحسب ما يلي :

|                                                                                     |                                                                          |                                                              |                                                              |
|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left( \frac{x+1}{x+2} \right)$                 | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x \ln x}$                   | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 2 \ln x}{3 + \ln x}$ | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x+3)}{\sqrt[3]{x}}$ |
| $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x+1} \ln \left( \frac{x^3+1}{x^2+2} \right)$ | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(+2 \tan x)}{x}$                        | $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{\ln x}$          |                                                              |
| $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) \ln x - x \ln(x+2)$                             | $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (x^2 - 1) \ln(x^2 + 2x - 3)$ |                                                              |                                                              |

### التمرين الثاني

أجزء (1) لتكن  $g$  الدالة العددية المعرفة على  $[0, +\infty[$  بما يلي  $g(x) = x - 2(x+1)\ln(x+1)$

(1) بين أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

(2) أ- أحسب المشتقة  $g'(x)$  و بين أن  $g$  تناقصية

ب- استنتج أن  $g(x) < 0$   $(\forall x \in ]0, +\infty[)$

أجزء (2) نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $[0, +\infty[$  بما يلي :  $f(x) = \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x}$

(1) بين أن  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$  ( يمكن وضع  $t = \sqrt{x}$  )

(2) بين أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  و أعط تأويلا هندسيا للتنبؤ

(3) أ- بين أن  $f'(x) = \frac{g(\sqrt{x})}{2x^2(1+\sqrt{x})}$

ب- ضع جدول تغيرات الدالة  $f$

(4) أرسم المنحنى  $(C_f)$

### التمرين الثالث

أجزء (1) نضع  $g(x) = x - 4 + 4 \ln x$

(1) أحسب النهايتين  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

(2) أحسب  $g'(x)$  و ضع جدول التغيرات

(3) أ- بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل في المجال  $]1, 2[$  حلا  $\alpha$

ب- استنتج أن  $g(x) > 0$  على المجال  $[\alpha, +\infty[$  و  $g(x) < 0$  على المجال  $]0, +\infty[$

أجزء (2) لتكن  $f$  الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $]0, +\infty[$  بما يلي :  $f(x) = \left(1 - \frac{4}{x}\right) \ln x$

### دالة لوجاريتمية

(1) بين أن  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$  ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجه

(2) بين أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$  ثم أول النتيجه هندسيا

(3) أ- بين أن  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$  ( $\forall x > 0$ )

ب- تحقق أن  $f(\alpha) = -\frac{4}{\alpha}(\ln \alpha)^2$  و ضع جدول تغيرات الدالة  $f$

(4) أرسم المنحنى  $(C_f)$  ( نأخذ  $\alpha \approx 1,75$  و  $f(\alpha) \approx -0,72$  و لاحظ أن  $f(1) = f(4) = 0$  )

### التمرين الرابع

لتكن  $f$  الدالة المعرفة على  $[0, +\infty[ \cup ]-\infty, -1]$  بما يلي :  $x \neq 0$  ;  $f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$  و  $f(0) = 0$   
أجء (1) :

(1) أ- بين أن  $f$  متصل على  $x_0 = 0$

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة  $f$  على  $x_0 = 0$

(2) أحسب نهايات الدالة  $f$

(3) أحسب المشتقة  $f'(x)$  و أدرس منحنى تغيرات الدالة  $f$  ثم ضع جدول التغيرات

(4) أرسم المنحنى  $(\zeta_f)$

أجء (2)

نعتبر الدالة  $g$  المعرفة بما يلي :  $g(x) = f(-1-x)$

(1) حدد مجموعة تعريف الدالة  $g$

(2) بين أن منحنى  $g$  هو مماثل لمنحنى الدالة  $f$  بالنسبة للمستقيم  $x = -\frac{1}{2}$  ( $\Delta$ )

(3) أ- بين أن  $f(n) < 1 < g(n)$   $\forall n \in \mathbb{N}^*$

ب- استنتج أن  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1}$

### التمرين الخامس

نضع  $U_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$

(1) باستعمال مبرهنة التزايد المتناهية بين أن  $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$  ( $\forall k \in \mathbb{N}^*$ )

(2) أ- بين أن  $U_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq U_n$  ( $\forall n \in \mathbb{N}^*$ )

ب- حدد النهاية  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

### دالة لوغاريتم نبيرية

(3) نعتبر المتتالية  $(V_n)_n$  بحيث :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad V_n = U_{n+1} - \ln n$

و نضع  $f(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$  و  $g(x) = \frac{1}{x+1} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$  لكل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]0, +\infty[$

أ- أعط جدولا تغيرات كل من  $f$  ;  $g$

ب- استنتج أن  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 0 < f(n) < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

ج- تحقق أن  $V_n = \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$  و استنتج أن  $(V_n)_n$  متتالية تناقصية

د- بين أن  $(\forall n > 1) \quad f(1) < V_n < 1 - \frac{1}{n}$  و استنتج أن المتتالية  $(V_n)_n$  متقاربة ثم حدد تأطيرا لنهايتها  $a$

### التمرين السادس

ليكن  $n$  عددا من  $\mathbb{N}^*$  و نعتبر الدالة  $f_n$  المعرفة بما يلي :  $f_n(x) = (x-n) \ln(x) - x \ln(x-n)$

(1) أ- حل في  $\mathbb{R}$  المتراجحة  $(x+1)^2 < 2x^2$

ب- بين أن  $(\forall p \in \mathbb{N}) \quad p \geq 5 \Rightarrow p^2 < 2^p$

ج- أدرس إشارة كل من  $f_n(n+1)$  و  $f_n(n+2)$

(2) أحسب  $f'_n(x)$  و  $f''_n(x)$  و أعط جدول تغيرات الدالة  $f_n$

(3) أ- أحسب النهاية  $\lim_{\substack{x \rightarrow n \\ x > n}} f_n(x)$

ب- بين أن  $(\forall x > n) \quad f_n(x) = -n \ln(x) - x \ln\left(1 - \frac{n}{x}\right)$

ج- أحسب النهاية  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$

(4) أرسم منحنى الدالة  $f_3$

(5) أ- بين أن المعادلة  $f_n(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha_n$

ب- بين أن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n - n) = 1$  ثم حدد النهاية  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_{n+1} - \alpha_n)$

### التمرين السابع

أجزء (1) نعتبر الدالة  $g$  المعرفة بما يلي :  $g(x) = x + 1 + \ln x$

(1) أحسب  $g'(x)$  و بين أن  $g$  تزايدية على  $]0, +\infty[$

(2) بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  و أن  $\alpha < \frac{1}{e}$

(3) استنتج إشارة الدالة  $g(x)$  على المجال  $]0, +\infty[$

أجزء (2) نعتبر الدالة العرئية  $f$  المعرفة على  $]0, +\infty[$  بما يلي :  $x \neq 0$  ;  $f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$  و  $f(0) = 0$

### دالة لوجاريتم نبيرية

(1) أ- بين أن  $f$  متصلة على  $0$

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة  $f$  على  $0$

(2) أ- أحسب النهاية  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى  $(C_f)$  عند  $+\infty$

(3) أ- بين أن  $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$  ( $\forall x > 0$ )

ب- بين أن  $f(\alpha) = -\alpha$  ثم أخرج جدول تغيرات الدالة  $f$

(4) أرسم المنحنى ( نأخذ  $\alpha \approx 0,28$  )

أجزاء (3) ليكن  $n$  عدد صحيح طبيعي

(1) بين أن المعادلات  $f(x) = n$  تقبل في المجال  $]0, +\infty[$  حلا وحيدا  $x_n$

(2) بين أن  $f(e^n) < n$  و استنتج أن  $x_n > e^n$  ثم أحسب النهاية  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$

(3) بين أن  $\ln\left(\frac{x_n}{e^n}\right) = \frac{n}{x_n}$  ثم حدد  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{e^n}$

### التمرين الثامن

أجزاء (1) : نعتبر الدالة  $f$  المعرفة بما يلي :  $f(x) = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{1}{x+1}\right)$

(1) حدد مجموعة تعريف الدالة  $f$  و أحسب نهايات الدالة  $f$

(2) أحسب المشتقة  $f'(x)$  و ضع جدول تغيرات الدالة  $f$

(3) ليكن  $m$  عددا حقيقيا من  $\mathbb{R}^{+*}$ .

أ- بين أن  $\frac{1}{m+1} \leq \ln\left(\frac{m+1}{m}\right) \leq \frac{1}{m}$

ب- استنتج أن  $0 < f(m) < \frac{1}{m(m+1)}$  ( $\forall m \in \mathbb{R}^{+*}$ )

أجزاء (2) :

نضع  $U_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+n}$  و  $T_n = f(n) + f(n+1) + \dots + f(n+n)$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$

أ- بين أن  $0 < T_n \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1}$  ( $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ) و أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$

ب- بين أن  $T_n = U_n - \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)$  ( $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ) و استنتج  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

ج- نضع  $V_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^{2n}}{2n}$  بين أن  $U_n - \frac{1}{n} \leq V_n \leq U_n + \frac{1}{n}$  ( $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ) ثم حدد  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$