التمرين الأول

أحسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\sqrt{x}\,\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x^3(\ln x)^4$ ، $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x}$ ، $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^3}{x^2}$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(\dfrac{2x+1}{2x+3}\right)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x\,\ln(x+1)}{x}$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2+3\sqrt{x})}{\ln(1+2x^2)}$

التمرين الثاني

حل في $\mathbb{R}$ ما يلي :

1) $2\ln(x-2)-\ln(x+3)=0$ ، $(\ln x)^2-3\ln x+2=0$ ، $(\ln x)^3-\ln x=0$

2) $\ln(x^2-x)+\ln\left(\dfrac{1}{3x+4}\right)<0$ ، $\ln x-2\geq\dfrac{4}{\ln x}$ ، $\ln x>-1+\ln 2$

التمرين الثالث

1) بين أن $(\forall x\in\,]0,+\infty[)\ \ln(1+x)\leq x\leq(x+1)\ln(1+x)$

2) أ- بين أن $\prod\limits_{k=1}^{k=n}\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k\leq e^n\leq\prod\limits_{k=1}^{k=n}\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^{k+1}$

ب- استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n!}$

التمرين الرابع

1) أ- بين أن $\ln t\leq t-1$ $(\forall\in\,]0,+\infty[)$

ب- استنتج أن $x\ln x\geq x-1$ $(\forall\in\mathbb{R}^{+*})$

2) بين أن $x\ln x\leq\dfrac{1}{2}(x^2-1)$ $(\forall x\in[1,+\infty[)$

3) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x\ln x$

أ- أدرس منحى تغييرات الدالة f و ضع جدول تغيراتها

ب- ليكن n عدد من $\mathbb{N}^*$. بين أن المعادلة $f(x)=\dfrac{1}{n}$ تقبل حلا وحيدا a_n و أن $1<a_n<e$

ج- أدرس رتابة المتتالية $(a_n)_{n\geq1}$ و استنتج أنها متقاربة

د- بين أن $\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}\leq a_n\leq1+\dfrac{1}{n}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$

التمرين الخامس

ليكن n عددا طبيعيا و بحيث $n\geq3$. نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f_n(x)=x^2-2n\ln x$

1) أ- أحسب النهايتين $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)$

ب- أدرس منحى تغيرات الدالة f_n و أنجز جدول التغيرات

2) بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلين مختلفين u_n و v_n بحيث $u_n<\sqrt{n}<v_n$

3) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$ و بين أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln(v_n)}{\ln(2n)}=\dfrac{1}{2}$

4) أ- بين أن $u_n\geq1$ $(\forall n\geq3)$

ب- تحقق أن $f_{n+1}(u_n)=-\ln u_n$ و استنتج أن المتتالية $(u_n)_n$ تناقصية

ج- بين أن $u_n \leq e^{\frac{3}{2n}}$ $(\forall n \geq 3)$ و استنتج أن $(u_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها

التمرين السادس

1) بين أن $\ln x \leq x-1$ $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}\right)$

2) ليكن n من $\mathbb{N}$ و بحيث $n \geq 2$. $x_1 ; x_2 ; ......; x_n$ و $\alpha_1 ; \alpha_2 ; ......; \alpha_n$ أعداد حقيقية موجبة

بحيث $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$ و نضع $y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$

أ- بين أن لكل k من $\{1;2;.....;n\}$ لدينا : $\alpha_k \ln\left(\frac{x_k}{y}\right) \leq \frac{\alpha_k x_k}{y} - \alpha_k$

ب- استنتج أن $\sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k \ln(x_k) \leq \ln\left(\sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k x_k\right)$

ج- بين أن : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \ln(x_k) \leq \ln\left(\frac{\sum_{k=1}^{k=n} x_k}{n}\right)$

د- أثبت أن : $\sqrt[x]{x_1 x_2 .....x_n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} x_k$

ه- بين أن $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

و استنتج أن $\frac{x_1}{x_n} + \frac{x_2}{x_{n-1}} + ... + \frac{x_n}{x_1} \geq n$ أو $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + ... + \frac{x_n}{x_1} \geq n$ لكل $x_1 ; x_2 ; ......; x_n$ من $\mathbb{R}^{+*}$

التمرين السابع

1) بين أن $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ $(\forall x > 0)$

2) نضع $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$ لكل عدد طبيعي غير منعدم n

أ- أحسب U_1 ; U_2

ب- بين أن المتتالية $(U_n)_n$ متقاربة (نذكر بأن $\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)

3) نضع $V_n = \prod_{k=1}^{k=n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$ لكل عدد طبيعي غير منعدم n . بين أن المتتالية $(V_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها

التمرين الثامن

ليكن x عددا من $]0,+\infty[$ و نعتبر الدالة φ المعرفة بما يلي : $\varphi(t) = x^2(\ln(1+t) - t) - t^2(\ln(1+x) - x)$

1) بين أن الدالة φ تحقق شروط خاصية رول على المجال $[0,x]$

2) استنتج أن يوجد عنصر c بحيث : $\frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \frac{-1}{2(1+c)}$

3) استنتج أن $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$

4) حدد $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$