التمرين الأول

لتكن f دالة عددية معرفة بما يلي : $f(x)=\ln\left(\frac{4x}{x+1}\right)-\sqrt{x}$ وليكن (C_f) منحناها في م م م_$(O;\vec{i};\vec{j})$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f ثم احسب نهايات f عند محدات D_f
2. ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f)
3. بين أن : $(\forall x>0) : f'(x)=\frac{x+\sqrt{x}+2}{2x(x+1)}(1-\sqrt{x})$ ثم أعط جدول تغيرات الدالة f
4. أنشئ المنحنى (C_f) (نقبل أن (C_f) نقطة انعطاف أفصولها x_0 بحيث $3<x_0<4$)

التمرين الثاني

نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي : $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{\ln x}$

1) أ- حدد D_f مجموعة تعريف f

ب- أحسب نهيات الدالة f عند محدات D_f

2) أحسب المشتقة $f'(x)$

3) نضع $g(x)=x\ln x-(x+1)\ln(x+1)$ حيث $x\in\mathbb{R}^{+*}$

أ- أحسب المشقة $g'(x)$ و بين أن g تناقصية

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ ثم استنتج أن $g(x)<0$ $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}$

4) أنجز جدول تغيرات الدالة f

5) أرسم المنحنى (C_f)

التمرين الثالث

نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي : $f(x)=\ln x\ \ln(1-x)\ ;\ x\neq 0\ ;\ x\neq 1$ و $f(0)=f(1)=0$

1) حدد مجموعة تعريف f و بين أن المستقيم $(\Delta) : x=\frac{1}{2}$ محور تماثل للمنحنى (C_f)

2) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ ماذا تستنتج ؟

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين $x_0=0$

3) لتكن g الدالة المعرفة على $\left]0,\frac{1}{2}\right]$ بما يلي : $g(x)=(1-x)\ln(1-x)-x\ln x$

أ- أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$

ب- أحسب $g'(x)$ و بين أن $g''(x)=\frac{2x-1}{x(1-x)}$

ج- بين أن المعادلة $g'(x)=0$ تقبل حلا وحيد α ثم حدد إشارة الدالة $g(x)$

4) بين أن $f'(x)=\frac{g(x)}{x(1-x)}$ ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f على D_f

5) بين أن $\forall x\in]0,1[\ :\ 0<\ln x\ \ln(1-x)<(\ln 2)^2$

6) أرسم المنحنى (C_f)

التمرين الرابع

الجزء(1) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=\frac{-2}{x^2+1}+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

1) أحسب نهايتي الدالة g

2) أحسب $g'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة g

3) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α ينتمي للمجال $]0,1[$ و استنتج إشارة $g(x)$

الجزء(2) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $x\neq 0$; $f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ و $f(0)=0$

1) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ و أعط تأويلا هندسيا للنتيجة

2) أ- تحقق أن $f(x)=x\ln\left(x^2+1\right)-2x\ln x$ $(\forall x>0)$ و بين أن f متصلة على يمين $x_0=0$

ب- أدرس قابلية إشتقاق الدالة f على يمين $x_0=0$

3) بين أن $f'(x)=g(x)$ $(\forall x>0)$ ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f

4) أرسم المنحنى (C_f) (نأخذ $\alpha\simeq 0,5$ و $f(\alpha)\simeq 0,8$)

التمرين الخامس

ليكن n عددا من $\mathbb{N}$ و بحيث $n\geq 2$. نعتبر الدالة $f_n(x)=-x^2+2+n\ln x$

1) أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_n(x)$

2) أحسب الدالة المشتقة $f_n'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f_n

3) أ- نضع $g(x)=x\ln x-x+2$

(i) أحسب $g'(x)$ و أعط جدول تغيرات الدالة g

(ii) استنتج أن $g(x)>0$ $(\forall x\in]0,+\infty[)$

ب- تحقق أن $f\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)>0$ ثم بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلين U_n و V_n (نأخذ $U_n<V_n$)

ج- أحسب النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ و بين أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln V_n}{\ln n}=\frac{1}{2}$

4) أ- بين أن $U_n<1$ $(\forall n\geq 2)$

ب- تحقق أن $f_{n+1}(U_n)=\ln(U_n)$ و بين أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 3}$ تزايدية

ج- حدد $\ln U_n$ بدلالة U_n , n و بين أن $-\frac{2}{n}\leq \ln U_n\leq -\frac{1}{n}$ $(\forall n\geq 2)$ ثم حدد النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

التمرين السادس

نعتبر الدالة العددية المعرفة f على $[0,1[\cup]1,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+\ln\left|\sqrt{x}-1\right|$

وليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1] أ- احسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)$.

ب- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

2] ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة $x_0=0$ على اليمين ، ثم أول النتيجة المحصل عليها هندسيا .

3] أ - بين أن : $f'(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}$.

ب - حدد إشارة $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f .

4] أنشئ المنحنى $(C_{g^{-1}})$.

التمرين السابع

I) نعتبر الدالة العددية h المعرفة بما يلي : $h(x)=\frac{2x^2}{x^2-1}+\ln\left|x^2-1\right|$

1. حدد D_h ثم أحسب نهايات h عند محدات D_h

2. بين أن : $(\forall x\in D_h):h'(x)=\frac{2x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$

3. أعط جدول تغيرات الدالة h

4. أستنتج إشارة $h(x)$ لكل x من D_h

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=x\ln\left|x^2-1\right|$ و (C_f) منحناها في م م م $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. أ- حدد D_f ثم أحسب نهايات f عند محدات D_f

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصلة

2. أ- بين أن : $(\forall x\in D_f);f'(x)=h(x)$

ب- أعط جدول تغيرات الدالة f

3. أستنتج من خلال دراسة الدالة h إحداثيتي I نقطة انعطاف المنحنى (C_f)

4. أ- حل في D_f المعادلة $f(x)=0$

ب- أنشئ المنحنى (C_f)

التمرين الثامن

[I 1) نعتبر الدالة $g(x)=\frac{-1}{x+1}+2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ حيث $x\in\left]0,+\infty\right[$

أ- أحسب $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$

ب- أحسب المشتقة $g'(x)$ و ضع جدول تغيرات الدالة g ثم استنتج إشارة $g(x)$

1) نضع $v(x)=\frac{x^3}{3}$ و $u(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$

بين أن $0\le\frac{1}{1+x}-1+x\le x^2$ $\forall x\in\mathbb{R}^+$ ثم استنتج أن $0\le u(x)\le v(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}^+$

[II لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^+$ كما يلي : $f(x)=x^2\ln\left(\frac{1}{x}+1\right);x\neq0$ و $f(0)=0$

1) أ- بين أن f متصلة على يمين 0

ب- أدرس قابلية اشتقاق f على يمين 0

2) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

ب- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى C_f بجوار $+\infty$

3) أحسب المشتقة $f'(x)$ ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f

4) أرسم المنحنى C_f

التمرين التاسع

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\left]0,+\infty\right[$ بما يلي : $f(x)=x+\ln x$

1) أحسب نهايتي الدالة f

2) أدرس منحى تغيرات الدالة f و ضع جدول تغيراتها

3) ليكن n عددا من $\mathbb{N}$.

أ- بين أن المعادلة $f(x)=n$ تقبل حلا وحيدا v_n

ب- حدد قيمة v_1 و بين أن المتتالية $(v_n)_n$ تزايدية

4) نضع $g(x)=\ln x-x+1$

أ- أدرس تغيرات الدالة g و أنجز جدول تغيراتها

ب- استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم $y=2x-1$ (Δ)

5) بين أن $\frac{n+1}{2}\le v_n$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$

التمرين العاشر

التمرين العاشر

نعتبر الدالة g المعرفة بما يلي : $g(x)=x^2+x-\ln(x+1)$

1) حدد مجموعة تعريف الدالة g و أحسب النهاية $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} g(x)$

2) أ- أثبت أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

ج- بين أن المنحنى (C_g) يقبل عند $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الاراتيب

3) أحسب الدالة المشتقة و أنجز جدول تغيرات الدالة g

4) أرسم المنحنى (C_g)

5) نضع $f(x)=x^2-\ln(x+1)$

أ- أدرس تغيرات الدالة f

ب- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين $x_0=0$ و α بحيث $\frac{1}{2}<\alpha<1$

ج- استنتج أن $g(x)<x$ $(\forall x\in]0,\alpha[)$

6) لتكن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرف كما يلي : $U_0=\frac{1}{e}$ و $U_{n+1}=g(U_n)$

أ- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\ :\ 0<U_n<\alpha$

ب- أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و استنتج أن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة وحدد نهايتها

التمرين الحادي عشر

التمرين الحادي عشر

ليكن n عددا طبيعيا من $\mathbb{N}^*$ و نعتبر الدالتين $g_n(x)=1+(1-n)x^n-\ln x$

و $\begin{cases} f_n(x)=\dfrac{x}{x^n-\ln x} & ,\ x\neq 0 \\ f_n(0)=0 \end{cases}$

1) بين أن $x^n>\ln x$ $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})$ و استنتج مجموعة تعريف الدالة f_n

2) أ- أدرس اتصال الدالة f_n على يمين $x_0=0$

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f_n على يمين $x_0=0$

3) أ- أدرس منحى تغيرات الدالة g_n

ب- بين أن المعادلة $g_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا نرمز له بالرمز b_n

ج- بين أن $\sqrt[n]{\frac{1}{n}}<b_n<1$ $(\forall n\geq 3)$

د- أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}$ و استنتج أن $(b_n)_n$ متقاربة و أن $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=1$

ه- بين أن $b_n^n=\frac{1-\ln b_n}{n-1}$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} n(b_n)^n=1$

4) أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$

5) أحسب f_n' و ضع جدول تغيرات الدالة f_n

6) أرسم المنحنيين (C_2) ; (C_1) للدالتين f_2 , f_1

التمرين الثاني عشر

الجزء الأول : نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بما يلي : $g(x)=\ln(|x-2|)-\dfrac{x-1}{x-2}$

1) أ- أحسب نهايات الدالة g عند محدات مجموعة التعريف

ب- أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_g)

ج- أحسب المشتقة $g'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة g

2) أ- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $]2,+\infty[$ حلا وحيدا α و أن $5<\alpha<6$

ب- استنتج إشارة الدالة $g(x)$ على $\mathbb{R}-\{2\}$

ج- أدرس تقعر المنحنى (C_g) و حدد نقطة انعطاف و أنشئ المنحنى (C_g) (نأخذ $\alpha\simeq 5,59$)

3) ليكن h قصور الدالة g على المجال $\left[1,2\right[$

أ- بين أن h تقبل دالة عكسية h^{-1} معرفة على مجال $J=[0,+\infty[$

ب- بين أن h^{-1} قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

ج- أدرس قابلية اشتقاق الدالة h^{-1} على يمين $x_0=0$

د- (i) بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)(\exists! a_n\in\,]0,+\infty[)\ \ h^{-1}(a_n)=1+\dfrac{1}{n}$

(ii) أدرس رتابة المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$ و استنتج أنها متقاربة ثم حدد نهايتها

الجزء الثاني :

1) أ- بين أن المعادلة $g(x)=x$ تقبل في المجال $[0,1]$ حلا وحيدا β

ب- بين أن $g([0,1])\subseteq[0,1]$

2) بين أن $(\forall x\in[0,1])\ \ |g'(x)|\leq\dfrac{1}{4}$

3) نعتبر المتتالية $(u_n)_n$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases}u_0=0\\ u_{n+1}=g(u_n)\end{cases}$

أ- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\ \ 0\leq u_n\leq 1$

ب- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\ \ |u_{n+1}-\beta|\leq\dfrac{1}{4}|u_n-\beta|$

ج- استنتج أن المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها

التمرين الثالث عشر

الجزء (1) لتكن g الدالة المعرفة على $]-1,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=-\dfrac{x}{x+1}+2\ln(x+1)$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ و بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}g(x)=+\infty$

2) أ- بين أن $g'(x)=\dfrac{2x+1}{(x+1)^2}$

ب- ضع جدول تغيرات الدالة g

ج- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $\left]-1,-\dfrac{1}{2}\right[$ حلا وحيدا α

3) أحسب $g(0)$ و استنتج أن $g(x)<0$ على المجال $]\alpha,0[$ و أن $g(x)>0$ على المجالين $]-1,\alpha[$ و $]0,+\infty[$

الجزء (2) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[-1,+\infty[$ بما يلي : $\begin{cases}f(x)=\dfrac{x^2}{\ln(1+x)} & x\neq 0\ ;\ x\neq -1\\ f(0)=0 \quad ;\quad f(-1)=0\end{cases}$

1) أ- بين أن $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$ و أعط تأويلا هندسيا للنتيجة

2) أ- بين أن f متصلة في النقطة $x_1=-1$ على اليمين

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين النقطة $x_1=-1$ و أعط تأويلا هندسيا للنتيجة

3) أ- بين أن $f'(x)=\frac{x\,g(x)}{(\ln(1+x))^2}$ $\quad (\forall x\in]-1,+\infty[-\{0\})$

ب- تحقق أن $f(\alpha)=\frac{2(\alpha+1)}{\alpha}$ و أنجز جدول تغيرات الدالة f

4) أ- بين أن $x-\ln(x+1)\geq 0$ لكل x من المجال $]-1,+\infty[$

ب- ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم $y=x$

5) أرسم المنحنى (C_f) (نأخذ $\alpha\simeq -0,7$ و $f(\alpha)\simeq -0,4$)

التمرين الرابع عشر

الجزء الأول : نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $g(x)=\frac{2x^2}{1+x^2}-\ln(1+x^2)$

1) أدرس منحى تغيرات الدالة g

2) استنتج أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α ينتمي للمجال $\left]\frac{4}{3},2\right[$

3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}^+$

الجزء الثاني :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $x\neq 0$; $f(x)=\frac{\ln(1+x^2)}{x}$ و $f(0)=0$

1) أ- أدرس زوجية الدالة f

ب- بين أن f قابلة للاشتقاق في النقطة $x_0=0$ و أعط معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة $x_0=0$

ج- بين أن $\ln(1+x)\leq x$ $(\forall x\in]-1,+\infty[)$ ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المماس (T)

2) أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3) أحسب المشتقة $f'(x)$ و أدرس تغيرات الدالة f ثم ضع جدول تغيراتها

4) أرسم المنحنى (C_f)

الجزء الثالث :

نضع $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ لكل x من $\mathbb{R}$

1) أدرس زوجية الدالة F

2) أحسب $F'(x)$ و أدرس إشارتها ثم أنجز جدول التغيرات

3) أ- بين أن $0\leq F(x)\leq \frac{1}{2}x^2$ (يمكن استعمال نتيجة الجزء الثاني 1) ج-)

ب- بين أن $(\forall t\geq 1)$ $\quad \frac{\ln(t^2)}{t}\leq\frac{\ln(1+t^2)}{t}\leq\frac{\ln(2t^2)}{t}$

ج- أحسب التكامل $\int_1^x \frac{\ln t}{t}\,dt$ و استنتج النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$

4) أرسم المنحنى (Γ_F)