

ثانوية الجولان
التأهيلية

السنة الثانية بكالوريا
علوم رياضية

السنة الدراسية :
2010 – 2011

سلسلة التمارين رقم : 04

الدوال اللوغاريتمية

التمرين 02

الجزء I :

لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\{2\} -]1, +\infty[$ بما يلي:

$$g(x) = \frac{(x-1)^2}{x(x-2)} - \ln|x^2 - 2x|$$

1 - a - ضع جدولا لتغيرات الدالة g

2 - b - بين أنه : $g(\alpha) = 0 : (\exists \alpha \in]2, +\infty[)$

2 - استنتج إشارة $g(x)$ على $\{2\} -]1, +\infty[$

الجزء II :

لتكن f الدالة العددية المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln|x^2 - 2x|}{(x-1)^2}, & x \neq 1 \\ f(1) = -1 \end{cases}$$

و (C_f) منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1 - a - حدد حيز تعريف الدالة f

2 - b - بين أن (C_f) متماثل بالنسبة للمستقيم Δ ذو المعادلة : $x = 1$

2 - a - أدرس اتصال الدالة f في النقطة 1

2 - b - بين أن:

$$\left(\forall t \in \left]0, \frac{1}{4}\right[: -\frac{t^2}{2} - t^3 + t \leq \ln(1-t) + 1 \leq -\frac{t^2}{2} \right)$$

3 - c - ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين النقطة 1 ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها

3 - أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f)

4 - أدرس تغيرات الدالة f

5 - a - تحقق أن : $\alpha(\alpha-2)f(\alpha) = 1$

6 - b - حدد تقاطع (C_f) مع محور الأفاصيل

6 - أنشئ (C_f)

التمرين 01

الجزء الأول:

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي:

$$f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$$

1 - لتكن φ الدالة العددية المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي:

$$\varphi(x) = x + 1 + \ln x$$

a - أدرس تغيرات الدالة φ

b - بين أن المعادلة $\varphi(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β بحيث : $0,27 \leq \beta \leq 0,28$

2 - أدرس تغيرات الدالة f على $]0, +\infty[$

الجزء الثاني:

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$

1 - بين أن المعادلة $f(x) = n$ تقبل حلا وحيدا $\alpha_n > 0$

2 - a - بين أن : $f(e^n) \leq n$ ثم استنتج أن $\alpha_n \geq e^n$

$$b - \text{بين أن : } \ln\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right) = \frac{n}{\alpha_n}$$

$$3 - \text{نضع : } \Phi_n = \frac{\alpha_n}{e^n} - 1$$

a - تحقق أن : $\Phi_n \geq 0$ وأكتب $(1 + \Phi_n) \ln(1 + \Phi_n)$ بدلالة n

b - بين أن : $0 \leq (1+t) \ln(1+t) - t \leq \frac{t^2}{2} : (\forall t \geq 0)$

$$c - \text{بين أن : } \Phi_n \leq ne^{-n} \leq \Phi_n + \frac{\Phi_n^2}{2}$$

d - بين أن : $0 \leq ne^{-n} - \Phi_n \leq \frac{n^2}{2} e^{-2n}$

e - استنتج النهاية : $\lim(e^n + n - \alpha_n)$

لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتتين على المجال $]-1, +\infty[$ كما يلي:

التمرين : 03

$$g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x} \quad \text{و} \quad f(x) = \ln(1+x) - x$$

1 - حدد جدول تغيرات كل من f و g

2 - استنتج إشارة كل من $f(x)$ و $g(x)$ لكل x من $]-1, +\infty[$

3 - (U_n) و (V_n) متتاليتين عدديتين معرفتين كما يلي:

$$U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$$

$$V_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$$

a - بين أن (U_n) تناقصية و أن (V_n) تزايدية

b - أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - V_n)$

(تحديد نهاية متتالية باستعمال اللوغاريتم)

لتكن $(V_n)_{n \geq 2}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

التمرين : 04

$$(\forall n \geq 2) \quad V_n = \sum_{k=2}^n \log_{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{2}{k(k+1)} \right)$$

1 - بين أن لكل $x \in [2, +\infty[$ لدينا :

$$\log_{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{2}{x(x+1)} \right) = \log_{\frac{1}{3}}(x-1) - \log_{\frac{1}{3}}(x) + \log_{\frac{1}{3}}(x+2) - \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$$

2 - بين أن $\lim V_n = 1$

3 - نضع : $U_n = 1 - \frac{1}{n^2}$ ($\forall n \geq 2$)

a - بين أن : $U_2 \times U_3 \times \dots \times U_n = \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n} \right)$ ($\forall n \geq 2$)

b - أحسب بدلالة n التعبير التالي : $\sum_{k=2}^n \ln(U_k)$

c - استنتج $\lim \left(\sum_{k=2}^n \ln(U_k) \right)$

التمرين رقم: 05

1 - نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بما يلي:

$$g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2 + 1}$$

1 - أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

2 - a - بين أن

$$g'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{x(x^2 + 1)^2} \quad (\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$$

b - ضع جدولاً لتغيرات الدالة g

3 - a - بين أنه يوجد عدد حقيقي $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ بحيث $g(\alpha) = 0$

b - استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0, +\infty[$

II - لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0, +\infty[$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) & , x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

و (C_f) منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1 - أحسب النهايتين التاليتين: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

2 - a - بين أن $f'(x) = g(x)$ $(\forall x \in]0, +\infty[)$

b - ضع جدولاً لتغيرات الدالة f

3 - a - حدد الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f)

b - أدرس تقعر المنحنى (C_f) وحدد نقطة انعطافه

4 - أنشئ المنحنى (C_f)

التمرين رقم 06:

ليكن $a \in]0, +\infty[- \{1\}$

نعتبر الدالة العددية f_a المعرفة كما يلي:

$$f_a(x) = \log_a(x) - \log_x(a)$$

و (C_{f_a}) منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1 - أ - حدد D_{f_a} مجموعة تعريف الدالة f_a

b - أحسب نهايات f_a عند محددات D_{f_a} حسب قيم العدد الحقيقي a

2 - أ - حدد الدالة المشتقة للدالة f_a

b - حدد حسب قيم a جدول تغيرات الدالة f_a

3 - ليكن g_a قصور الدالة f_a على المجال $]1, +\infty[$

و h_a قصورها على المجال $]0, 1[$

أ - بين أن g_a تقابل من $]1, +\infty[$ نحو مجال يجب تحديده

b - بين أن:

$$h_a(x) = -g_a\left(\frac{1}{x}\right) \quad (\forall x \in]0, 1[)$$

ج - استنتج أن h_a تقابل من $]0, 1[$ نحو $\mathbb{R}$

4 - حل في D_{f_a} المعادلة: $f_a(x) = 0$

5 - أنشئ في نفس المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ المنحنيين (C_{f_2})

$$\left(C_{f_{\frac{1}{2}}}\right) \text{ و } \left(C_{f_{\frac{1}{2}}}\right)$$