

~ الثانية علوم رياضية ~
سلسلة المتتاليات

التمرين 1

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{1}{4x^2 + 4}$

ونعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. أ. أدرس تغيرات f على $\mathbb{R}^+$

ب. بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا $\alpha \in \left] \frac{1}{5}, \frac{1}{2} \right[$

ج. بين أن : $(\forall (x, y) \in [0, 1]^2) : |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2} |x - y|$

2. بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < u_n \leq \frac{1}{2}$

3. أ. بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$

ب. استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة و أحسب نهايتها

4. نضع $w_n = u_{2n+1}$ و $v_n = u_{2n}$

أ. بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : w_n < \alpha < v_n$

ب. أدرس رتبة (v_n) و (w_n)

5. أ. بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_{n+1} - w_{n+1} \leq \frac{1}{4} (v_n - w_n)$

ب. بين أن (v_n) و (w_n) متحاديتان و حدد نهايتهما المشتركة

التمرين 2

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $f_n(x) = 3x^n - x - 1$

1. أ. بين أن f_n تزايدية على $\left[\sqrt[n]{\frac{1}{3n}}, +\infty \right[$ و تناقصية على $\left] 0, \sqrt[n]{\frac{1}{3n}} \right[$

ب. ضع جدول تغيرات f_n و استنتج إشارتها

2. بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا u_n في المجال $[0, +\infty[$

3. أحسب $f_n(1)$ و استنتج أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 0 < u_n < 1$

4. أ. بين أن : $(\forall x \in]0, 1[) : f_{n+1}(x) < f_n(x)$

ب. استنتج أن المتتالية (u_n) تزايدية

ج. بين أن المتتالية (u_n) متقاربة

5. نضع $\lim u_n = l$

أ. بين أن : $0 \leq l \leq 1$

ب. بين أن : $u_n \leq l$: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

ج. بين أن : $l = 1$

つづく