

هذا الملف تم تحميله من موقع Talamid.ma

الأستاذ : الحيان

المتتاليات العددية والدوال العددية

الثانية بكالوريا علوم رياضية

التمرين 1 :

I نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ للأعداد الصحيحة الموجبة قطعاً المعرفة لكل عدد صحيح طبيعي n بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

بين ، باستعمال البرهان بالترجع ، أنه لكل عدد صحيح طبيعي n : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq n$

$$(b) \forall n \in \mathbb{N} : u_n u_{n+2} + (-1)^{n+1} = (u_{n+1})^2$$

II لتكن $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ و $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المتتاليتين العدديتين المعرفتين بما

$$(a) \forall n \in \mathbb{N} ; \quad \alpha_n = \frac{u_{2n-1}}{u_{2n}} ; \quad \beta_n = \frac{u_{2n}}{u_{2n+1}}$$

$$(1) \forall n \in \mathbb{N}^* ; \quad \beta_n - \alpha_n = \frac{1}{u_{2n} u_{2n+1}}$$

$$(b) \forall n \in \mathbb{N}^* ; \quad 0 < \beta_n - \alpha_n < \frac{1}{n} \quad \alpha_n < \beta_n$$

$$(2) \forall n \in \mathbb{N}^* ; \quad \alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{1}{u_{2n} u_{2n+2}}$$

(يمكن استعمال نتيجة السؤال I - ب)

$$(b) \forall n \in \mathbb{N}^* ; \quad \alpha_n = \frac{1}{\beta_n} - 1$$

ج) استنتاج تغيرات كل من المتتاليتين $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ و $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

(3) (أ) بين أن المتتاليتين $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ و $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متزايدتان .

(ب) أحسب نهاية كل من المتتاليتين $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ و $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

التمرين 2 :

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x حيث :

$$f(x) = 2 + \frac{1}{2} \sin(x)$$

(1) بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[0, \pi]$ بحيث : $f(\alpha) = \alpha$

(2) لتكن المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية ، بين أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة وأن :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \alpha$$

التمرين 3 :

I لتكن g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x حيث :

$$g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{2x^2+2}}$$

(1) أحسب نهايات g عند حدات مجموعة تعريفها .

$$(b) \forall x \in \mathbb{R} : \quad g'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{2(x^2+1)^3}}$$

الأستاذ : الحيان

المتتاليات العددية والدوال العددية

الثانية بكالوريا علوم رياضية

التمرين 5 :

ج) استنتاج أن : $0 < g'(x) < \frac{1}{\sqrt{2}}$
د) أعط جدول تغيرات الدالة g .

(2) لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = g(u_n) ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(أ) بين أن : $0 \leq u_n < 1$

$$(b) \forall n \in \mathbb{N} : \quad 0 < |u_{n+1} - 1| < \frac{1}{\sqrt{2}} |u_n - 1|$$

ج) استنتاج أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة وحدد نهايتها .

II نعتبر الدالة العددية f لمتغير حقيقي حيث :

$$f(x) = \operatorname{Arc cos}(g(x))$$

(1) حدد D حيز تعريف الدالة f .

(ب) أحسب نهايات f عند حدات D

$$(c) \forall x \in]1, +\infty[; \quad f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

$$(d) \forall x \in]-\infty, 1[; \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2+1}$$

$$(2) (a) أثبت أن : $f(x) = \operatorname{Arc tan}(x) - \frac{\pi}{4}$$$

$$(b) \forall x \in]-\infty, 1[; \quad f(x) = \frac{\pi}{4} - \operatorname{Arc tan}(x)$$

ب) أدرس قابلية اشتقاق f في النقطة 1.

(3) أعط جدول تغيرات الدالة f .

(4) (أ) بين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف I

ب) أرسم (C_f) والماس لـ (C_f) في النقطة I.

التمرين 4 :

$$(1) \text{برهن على أن: } 2x - \frac{4}{3}x^3 \leq \sin(2x) \leq 2x$$

(2) نعتبر المتتاليتين $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفتين بما يلي :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{2n^2} \quad \text{و} \quad u_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{2n^2}\right)$$

(أ) أحسب v_n بدلالة n وحدد v_n .

$$(b) \forall n \in \mathbb{N}^* : \quad 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 \leq n^4$$

$$(c) \forall n \in \mathbb{N}^* : \quad v_n - \alpha \frac{1}{n^2} \leq u_n \leq v_n$$

حيث α عدد حقيقي يتم تحديده . استنتاج أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة وحدد نهايتها .

التمرين 5 :

لتكن f الدالة العددية لمتغير حقيقي x المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \frac{2}{3} \sqrt{-x^2 + 4x + 5}$$

(1) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على حيز تعريفها .

(ب) أعط جدول تغيرات الدالة f .

(ج) أنشئ (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى

(2) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : w_n < v_n$

(يمكن استعمال كون f تزايدية على المجال $[1, 2]$)

(3) بين أن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تناقصية وأن $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تزايدية.

(4) (أ) بين أن : $\forall x \in [1, +\infty[; |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

ب) بتطبيق مبرهنة التزايدات المتهنية على الدالة f , استنتج

$$\forall n \in \mathbb{N}^* ; 0 < v_n - w_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^2 (v_{n-1} - w_{n-1})$$

ج) استنتج أن المتاليتين $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متزايدتان.

التمرين 7 :

نعتبر المتالية العددية $(u_n)_{n \geq 1}$ بحيث :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \sqrt{k} ; n \geq 2 \end{cases}$$

1) باستعمال مبرهنة التزايدات المتهنية للدالة $F: x \mapsto \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ على

المجالات $[k, k+1]$ حيث : $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, أثبت أن :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* ; u_n - \frac{1}{n} \leq \frac{2}{3} - \frac{2}{3n\sqrt{n}} \leq u_n - \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

2) استنتج أن المتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ متقاربة وحد نهايتها.

التمرين 8 :

لتكن f الدالة العددية لمتغير حقيقي حيث :

$$f(x) = \begin{cases} -x + \sqrt{x^2 + 1} ; x \geq 0 \\ \frac{4}{\pi} \operatorname{Arc tan}(-x + \sqrt{x^2 + 1}) ; x < 0 \end{cases}$$

1) أدرس اتصال f في النقطة 0.

ب) أدرس قابلية اشتقاق f في النقطة 0.

2) (أ) بين أن : $\forall x \in \mathbb{R}^* ; f'(x) < 0$.

ب) أعطي جدول تغيرات الدالة f محدداً نهايتها عند $+\infty$ و $-\infty$.

3) أنشئ (C_f) , المنحني الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى

معلم متعامد منظم (O, \vec{i}, \vec{j}) . (وحدة القياس : 2 cm)

4) نضع : $f(I) \subset I$. بين أن : $I = \left[\frac{1}{4}, 1\right]$

5) نعتبر المتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ حيث :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(أ) بين أن : $\forall x \in I ; |f'(x)| < \frac{4}{5}$

ب) باستعمال مبرهنة التزايدات المتهنية, بين أن :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* ; \left|u_n - \frac{1}{\sqrt{3}}\right| < \frac{4}{5} \left|u_{n-1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right|$$

ج) استنتج أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة وأحسب نهايتها.

د) بين أن :

معلم متعامد منظم (O, \vec{i}, \vec{j})

(2) لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $[0, 2]$ بما يلي :

$$g(x) = -1 - x + \sqrt{-x^2 + 4x + 5}$$

(أ) أعط جدول تغيرات الدالة g .

$$\forall x \in [0, 2] ; 0 \leq f(2) - f(x) \leq \frac{2}{3}(2-x)$$

(3) لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتالية العددية كالاتي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(أ) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 < u_n < 2$

ب) أدرس رتبة المتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\forall n \in \mathbb{N} ; |u_n - 2| < \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

د) استنتاج . $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$

التمرين 6 :

لتكن f الدالة العددية لمتغير حقيقي حيث :

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2 + 1}$$

1) أعطي جدول تغيرات الدالة f وتحقق أن : $f([1, 2]) \subset [1, 2]$

2) ليكن (C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى

معلم متعامد منظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

(أ) حدد أفالصيل نقط انعطاف المنحني (C_f) .

ب) أنشئ المنحني (C_f) .

لتكن g الدالة العددية لمتغير حقيقي حيث :

$$g(x) = \operatorname{Arc sin}(f(x))$$

1) حدد مجموعة تعريف الدالة g وأحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

ب) أدرس قابلية اشتقاق الدالة g في النقطة 0 على اليسار.

ج) أعطي جدول تغيرات الدالة g .

2) ليكن (C_g) المنحني الممثل للدالة g في المستوى المنسوب إلى

معلم متعامد منظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

(أ) أثبت أن : $\forall t \in [0, 1] ; \operatorname{Arc sin}(t) \geq t$

ب) استنتاج الوضع النسبي للمنحنين (C_f) و (C_g) على $[-\infty, 0]$.

(3) أنشئ, بلون مغاير, (C_g) .

(تحديد نقط الإنعطاف غير مطلوب)

نعتبر المتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ حيث :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} ; v_n = u_{2n} \quad w_n = u_{2n+1}$$

ونضع . $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \in [1, 2]$

تحقق من أن : (1)

$$g(x) = \operatorname{Arc} \sin\left(\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right)$$

(1) بين أن مجموعة تعريف الدالة g هي المجال $[-1,1]$

$$(2) \text{ بين أن: } \forall x \in [-1,1] : g'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

(3) نضع: $I = [-1,1]$ و $J = g(I)$ ؛ ولكن h الدالة العددية

$\forall x \in I : h(x) = g(x)$ بما يلي:

بين أن h تقابلاً محدداً J ؛ ثم أحسب $h^{-1}(x)$ لكل x من J .

$$(4) \text{ بين أن: } \forall x \in [-1,1] : g(x) = \frac{1}{2} \operatorname{Arc} \cos(x)$$

التمرين 12 :

لتكن f_α الدالة العددية لمتغير حقيقي حيث:

$$f_\alpha(x) = x + \operatorname{Arc} \cos\left(\frac{\alpha}{x}\right)$$

و α بارامتر حقيقي

و D_α حيز تعريف الدالة f_α

و (C_α) المنحني الممثل للدالة f_α في المستوى المنسوب إلى معلم

متعامد منظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

(1) تحقق من أن $D_0 = \mathbb{R}$ وأن (C_0) مستقيم محروم من نقطة A ينبعي تحديدها.

(2) حدد D_α من أجل $\alpha \neq 0$.

(ج) بين أن: $\forall t \in [-1,1] : \operatorname{Arc} \cos(t) + \operatorname{Arc} \cos(-t) = \pi$

وأثبت أن جميع المنحنيات (C_α) تقبل مركز تماثل مشترك مطلوب تحديده.

(د) أدرس إشارة $f_\beta(x) - f_\alpha(x)$ من أجل x في $D_\beta \cap D_\alpha$ و $\alpha < \beta$ ؛ وأول مبيانيا النتيجة.

(2) نفترض أن: $\alpha \neq 0$.

(أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x)$ ؛ وبين أن المستقيم الذي معادلته

$$y = x + \frac{\pi}{2}$$

(ب) أحسب $\lim_{\substack{x \rightarrow |\alpha| \\ x > |\alpha|}} \frac{f_\alpha(x) - f_\alpha(|\alpha|)}{x - |\alpha|}$ ، (ناقش حسب الحالتين).

(أ) $\alpha > 0$ و $\alpha < 0$. أول مبيانيا النتيجة.

(4) نفترض أن: $\alpha > 0$.

(أ) بين أن f_α تزايدية قطعاً على كل مجال من مجالات D_α .

(ب) ضع جدول تغيرات الدالة f_α .

(4) أنشئ (C_0) و (C_1) في نفس المعلم.

(5) لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتالية العددية المعرفة بما يلي:

$$0 < \alpha < a \quad \begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f_\alpha(u_n) \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

(أ) مثل في المعلم السابق على محور الأفاسيل النقط التي أضافتها

$$\alpha = 1 \quad a = 2 \quad u_1 = u_2 = u_3 \quad \text{من أجل: } a = 2 \quad \text{و} \quad a = 1$$

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[; f\left(\frac{1}{\tan(x)}\right) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\text{هـ) نضع: } \forall n \in \mathbb{N} ; a_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}$$

$$\text{iـ) تتحقق أن: } a_0 = 1 \quad \text{و} \quad a_n = 2^{n+1} - a_n$$

$$\text{iiـ) بين أن: } \forall n \in \mathbb{N} : u_n = \tan\left(\frac{\pi a_n}{2^{n+2}}\right)$$

التمرين 9 :

ليكن α عدداً حقيقياً أكبر قطعاً من $\frac{6}{5}$.

نعتبر المتاليتين العدديتين $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفتين بما يلي:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \begin{cases} u_{n+1} = \frac{5u_n + v_n}{6} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + (\alpha - 1)v_n}{\alpha} \end{cases} \quad \begin{cases} u_1 = 1 \\ v_1 = 6 \end{cases}$$

(1) بين بالترجم أن: $0 < u_n < v_n$.

(2) بين أن المتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ تزايدية وأن المتالية $(v_n)_{n \geq 1}$ تناقصية.

(3) بين أن: $\forall n \in \mathbb{N}^* : v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{5}{6}(v_n - u_n)$.

استنتج أن المتاليتين $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متباينتان.

(4) بين أن: $\forall n \in \mathbb{N}^* : 6\alpha u_{n+2} - (11\alpha - 6)u_{n+1} + (5\alpha - 6)u_n = 0$.

استنتج u_n بدلالة n و α ثم أحسب v_n بدلالة n و α .

التمرين 10 :

لتكن f الدالة العددية لمتغير حقيقي x المعرفة بما يلي:

$$f(x) = 2 + \frac{a}{x} \quad a \in]0, +\infty[\quad \text{حيث:}$$

(1) أدرس تغيرات الدالة f .

(ب) بين أن المعادلة $x = f(x)$ تقبل حل واحداً في المجال $]0, +\infty[$.

(2) نعتبر المتاليات $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \boxed{u_{n+1} = f(u_n)} \quad \boxed{v_n = u_{2n}} \quad \boxed{w_n = u_{2n+1}}$$

(أ) بين أن: $0 < v_n < a < w_n$.

(ب) بين أن المتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تزايدية قطعاً و أن المتالية $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تناقصية قطعاً، واستنتج أن المتاليتين $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربتان.

(ج) بين أن: $\forall n \in \mathbb{N} : w_{n+1} - v_{n+1} < \frac{a}{2v_n + a}(w_n - v_n)$.

(د) بين أنه يوجد عدد حقيقي k غير مرتبط بالعدد n بحيث $w_{n+1} - v_{n+1} < k(w_n - v_n)$ و $0 < k < 1$.

(هـ) استنتاج أن المتاليتين $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متباينتان يحددهما نهايتهما.

التمرين 11 :

لتكن g الدالة العددية لمتغير حقيقي x حيث:

للتكن g الدالة العددية لمتغير حقيقي x حيث:

II- نعتبر المتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = b & , \quad (b > \alpha) \\ u_{n+1} = f^{-1}(u_n) & , \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > \alpha$

2. أدرس رتبة $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ واستنتج أنها متقاربة .

-III

1. باستعمال مبرهنة التزايدات المتميزة ، بين أن :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - \alpha < \frac{1}{2}(u_n - \alpha)$$

2. استنتاج :

التمرين 16: نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x - \operatorname{Arc tan} x}{|\operatorname{Arc tan} x|} & , \quad x \in \mathbb{R}^* \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

ول يكن (C) منحنى f في معلم متعمد منظم (O, \vec{i}, \vec{j})

-I

1. حدد D حيز تعريف الدالة f .

2. أدرس زوجية f واستنتاج D_E مجموعة دراسة f .

3. أدرس اتصال f في النقطة 0 .

$$\forall x > 0 : \operatorname{Arc tan}(x) + \operatorname{Arc tan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

ب. حدد المستقيم (Δ) المقارب المائل ل (C) بجوار $+\infty$.

-II

1. باستعمال مبرهنة التزايدات المتميزة بين أن :

$$\forall x > 0 : 0 < \frac{x - \operatorname{Arc tan} x}{x} < \frac{x^2}{1+x^2}$$

ب. بين أن : $\forall x > 0 : \frac{x}{1+x^2} < \operatorname{Arc tan} x$

2. أدرس اشتقاق الدالة f على يمين 0 وأعط تأويلا هندسيا لذلك.

3. أدرس تغيرات f على D_E وأعط جدول تغيراتها على \mathbb{R} .

4. أ. بين أن :

$$\forall x > 0 : f''(x) = \frac{2\operatorname{Arc tan} x (x - \operatorname{Arc tan} x)}{\left((1+x^2)\operatorname{Arc tan}^2 x\right)^2}$$

ب. استنتاج تغير (C) .

-III- ليكن g قصور الدالة f على المجال $[0, +\infty]$

1. بين أن g تقابل من $[0, +\infty]$ نحو $[0, +\infty]$

2. أدرس اشتقاق g^{-1} على المجال $[0, +\infty]$

3. أنشئ (C) و $(C_{g^{-1}})$ منحنى g في نفس المعلم المتعمد

الممنظم (O, \vec{i}, \vec{j})

التمرين 17: ليكن $n \in \mathbb{N}^*$. نعتبر f_n الدالة العددية المعرفة بما

$$f_n(x) = \operatorname{Arc cos}\left(\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}\right)$$

يلي :

ب) بين أن المتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تزايدة قطعا .

ج) أثبت أن المتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ غير مكبورة .

د) بين أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

التمرين 13:

1. لكل n من \mathbb{N}^* نضع : $v_n = \sum_{k=1}^n k$ بدلالة n .

2. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^n k^2 \leq n^3$

3. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R}^* بما يلي :

$$\forall x > 0 : f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$$

ب) بين أن : $\forall x > 0 : x - \frac{x^2}{2} < f(x) < x$

4. لكل n من \mathbb{N}^* نضع : $S_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)$

التمرين 14: نعتبر المتاليتين العدديتين $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) & : \quad n \in \mathbb{N} \\ v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n} & : \quad n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 & , \quad v_0 = \sqrt{2} \end{cases}$$

1. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < u_n < v_n$

2. أدرس رتبة كل من المتاليتين $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

3. أ. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{1}{2}(v_n - u_n)$

ب. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : v_n - u_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$

ج. حدد :

4. استنتاج أن المتاليتين $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متحاذيتين .

5. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : v_n = \frac{1}{2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}$

وأن :

6. حدد النهايتين التاليتين :

التمرين 15:

I- لكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :

$$f(x) = \operatorname{Arc tan}(x) + 2x - 1$$

1. أثبت أن : $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) > 2$

2. بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} من \mathbb{R} نحو \mathbb{R} .

3. بين أن المعادلة $x = f(x)$ تقبل في \mathbb{R} حالا وحيدا α وأن

$$\alpha \in]0, 1[$$

4. بين أن : $\forall x > \alpha : f(x) > x$

5. أ. بين أن : $\forall x > 0 : \operatorname{Arc} \tan x + \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$
 ب. أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

$$2\text{cm} = \underline{\text{الوحدة}}$$

6. أنشئ المنحنى (C)
التمرين 20 :

I - لتكن g الدالة المعرفة على المجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ بما يلي :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{\tan x - x}{x}, & x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

1. بين أن : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] : (1 + \tan^2 x)x - \tan x > 0$

2. أ. بين أن :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] : g'(x) = \frac{(1 + \tan^2 x)x - \tan x}{x^2}$$

ب. بين أن الدالة g متصلة على اليمين في 0 ثم أعط رتبة g على

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

-II - لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \operatorname{Arc} \tan(g(x)), & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ f(0) = 0, & f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

1. أدرس اتصال f على اليمين في 0 وعلى اليسار في $\frac{\pi}{2}$.

2. أ. بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة $t \mapsto \tan t - t$

على المجال $[0, x]$ بحيث $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ؛ أثبت أن :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] : 0 \leq \tan x - x \leq x \tan^2(x)$$

ب. أحسب : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2}$

ج. أدرس قابلية اشتقاق f على اليمين في 0؛ ثم أعط تأويلا هندسيا.

3. أ. بين أن : $\forall t > 0 : \operatorname{Arc} \tan(t) + \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\pi}{2}$
 ثُم استنتج أن :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] : f(x) - \frac{\pi}{2} = -\operatorname{Arc} \tan\left(\frac{x}{\tan x - x}\right)$$

ب. بين أن :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}}$$

4. أدرس تغيرات g وأعط جدول تغيراتها.

$$2\text{cm} = \underline{\text{الوحدة}}$$

5. أنشئ (C) .

I-1. أ. بين أن f_n معرفة على \mathbb{R} .

ب. أدرس زوجية f_n ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$

2. أ. بين أن : $\forall x \in \mathbb{R}^+ : f_n(x) = \pi - 2\operatorname{Arc} \tan(x^n)$

ب. بين أن الدالة f_n قابلة للإشتقاق على المجال $[0, +\infty)$ وأن :

$$\forall x \in [0, +\infty) : f'_n(x) = \frac{-2nx^{n-1}}{x^{2n} + 1}$$

ج. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f_n على اليمين في 0 :

(ميز بين الحالتين : $n=1$ و $n \neq 1$)

د. أعط جدول تغيرات f_n على \mathbb{R} في كلتا الحالتين : $n=1$ و $n \neq 1$.

3. ليكن g_n قصور الدالة f_n على \mathbb{R}^+ . بين أن g_n تقابل من

نحو مجال I ينبغي تحديده؛ ثم حدد $(g'_n)(x)$ بدالة $\cotan\left(\frac{x}{2}\right)$.

II-نأخذ في كل ما يلي $n=1$.

1. بين أن : $\exists! \alpha \in [1, 2] / f_1(\alpha) = \alpha$

2. أنشئ في نفس المعلم المتعمد الممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) منحنى f_1 على \mathbb{R} ومنحنى g_1^{-1} .

التمرين 18 : لكن f الدالة العددية المعرفة بمايلي:

$$f(x) = 2\operatorname{Arc} \cos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) + \operatorname{Arc} \sin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) - \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$$

1. حدد D حيز تعريف الدالة f .

2. بسط كتابة $(f(x))$ لكل x من D . (يمكن وضع $(x = \tan(\theta))$).

3. حل المعادلة : $x \in \mathbb{R} : f(x) = \frac{2\pi}{3}$

التمرين 19 : لكن f الدالة العددية المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\pi x}{2\operatorname{Arc} \tan x}, & x \neq 0 \\ f(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

1. تحقق من أن f دالة زوجية.

ب. أحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2. بين أن : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arc} \tan x}{x} = 1$ ؛ ثم استنتاج أن الدالة f متصلة في $x_0 = 0$.

3. أ. بين أن : $\forall x > 0, \forall c \in]0, x[: \frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+c^2}$

ب. بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة $t \mapsto \operatorname{Arc} \tan t$ في مجال $[0, x]$ بحيث $x > 0$ ؛ أثبت أن :

$$\frac{1}{1+x^2} < \operatorname{Arc} \tan x < x$$

ج. بين أن f قابلة للإشتقاق على اليمين في $x_0 = 0$ ؛ ثم أعط التأويل الهندسي للنتيجة المحصل عليها.

4. أ. أحسب $(f'(x))$ لكل x من \mathbb{R} .

ب. أدرس إشارة $(f'(x))$ على \mathbb{R}^{+*} (يمكن استعمال نتيجة 3-ب).

ج. أعط جدول تغيرات f على \mathbb{R} .

هذا الملف تم تحميله من موقع Talamid.ma

2. أدرس تغيرات الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :
- $$g(x) = x\sqrt{-2x-1} + 1$$
- ثُم استنتج إشارتها . (أحسب : $g(-1)$)
- ب. أحسب $(x)' f$ لكل x من $\mathbb{R}^* - \left\{-1, -\frac{1}{2}\right\}$
- ج. أعط جدول تغيرات الدالة f .
3. أدرس الفروع الالنهائية للمنحنى (C_f) .

4. بين أن المعادلة $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$ تقبل حلًا وحيداً α وأن $f(x) = 0$ في α :

نعتبر المتالية العددية $(u_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بمايلي :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n = f(-n) - f(-n-1)$$

- أ. بين أن لكل n من \mathbb{N}^* يوجد عدد حقيقي c_n من $[-n-1, -n]$ بحيث :
- $$u_n = f'(c_n)$$

ب. بين أن المتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ متقاربة وأحسب نهايتها.

التمرين 23: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة

$$f(x) = \operatorname{Arc} \cos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) - \operatorname{Arc} \tan(x) \quad \text{بمايلي :}$$

ليكن (C) منحنى الدالة f في معلم متعمد منمنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. حدد D مجموعة تعريف الدالة f .

2. أ. حدد نهايات الدالة f عند حدودات D .

ب. استنتاج الفروع الالنهائية للمنحنى (C) .

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\operatorname{Arc} \cos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)}{x} = 2 \quad \text{أ. بين أن :}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\operatorname{Arc} \cos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)}{x} = -2 \quad \text{وأن :}$$

ب. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة 0 وأعط تأويلاً هندسياً للنتيجة.

ج. لتكن $' f$ الدالة المشتقة للدالة f . أحسب $(x)' f$ لكل x من $D - \{0\}$.

د. ضع جدول تغيرات الدالة f .

4. أنشئ المنحنى (C) .

5. لتكن g قصور الدالة f على المجال $[0, +\infty)$.

أ. أثبت أن g تقابل من $[0, +\infty)$ نحو مجال I يجب تحديده.

ب. بين أن :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* : \operatorname{Arc} \cos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = 2\operatorname{Arc} \tan x$$

ج. لتكن g^{-1} الدالة العكسية للدالة g .

أحسب $(g^{-1}(x))'$ لكل x من I .

د. أنشئ في نفس المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) منحنى الدالة g^{-1} .

التمرين 21: لتكن f الدالة العددية المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} f(x) = 1 + \sqrt[3]{x^3 - 2x^2} & , x \geq 2 \\ f(x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{2-x}}\right) & , x < 2 \end{cases}$$

1. حدد D_f ؛ حيز تعريف الدالة f .

2. أدرس اتصال الدالة f في النقطة $x_0 = 2$.

3. أحسب نهايات f عند حدودات D_f ؛ ثم أدرس الفروع الالنهائية للمنحنى (C_f) .

4. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين وعلى اليسار في النقطة $x_0 = 2$.

5. أحسب $(x)' f$ لكل x من المجال $[2, +\infty)$ ولكل x من المجال $[2, +\infty)$ ؛ ثم أعط جدول تغيرات الدالة f .

6. أرسم (C_f) . (نعطي : $f(0) \approx 0,4$).

7. ليكن g قصور الدالة f على المجال $[2, +\infty)$.

بين أن g تقابل من المجال $[2, +\infty)$ نحو مجال يجب تحديده. حدد g^{-1} ثم مثل منحنها في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

B. 1. أ. بين أنه يوجد عدد حقيقي k من المجال $[0, 1]$ بحيث :

$0 < g'(x) < k$ ؛ ثم استنتاج رتبة الدالة h على المجال

$h(x) = g(x) - x$ حيث :

ب. بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[0, 1]$ بحيث :

$$g(\alpha) = \alpha$$

نعتبر المتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{4} \\ u_{n+1} = g(u_n) & , n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

أ. بين أن : $0 < u_n < 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

ب. بين أن : $|u_{n+1} - \alpha| < k |u_n - \alpha|$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

ج. استنتاج أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة وأن نهايتها هي α .

التمرين 22: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة

$$\begin{cases} f(x) = 2\left(x + \operatorname{Arc} \sin\left|1 + \frac{1}{x}\right|\right) & , x \leq -\frac{1}{2} \\ f(x) = \sqrt[3]{x^2(2x+1)} + \pi - 1 & , x > -\frac{1}{2} \end{cases}$$

بمايلي :

و (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعمد منمنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) حيث :

$$\|\vec{i}\| = 2cm$$

1. أدرس اتصال الدالة f في النقطة $x_0 = -\frac{1}{2}$.

ب. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة $x_1 = 0$ و $x_0 = -\frac{1}{2}$.

و يمكن استعمال $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arc} \tan X}{X} = 1$.

هذا الملف تم تحميله من موقع Talamid.ma

<p>ما زلت تستنتج بالنسبة للمنحنى (C).</p> <p>أ. حسب $f'(x)$ لكل $x \in]0, 2[$ أحسب $f'(x)$ لكل $x_0 = 2$.</p> <p>ب. بتطبيق مبرهنة التزايدات المئوية على المجال $[0, x]$:</p> $0 < \frac{f(x) - f(0)}{x} < \sqrt{x}$ <p>ثُم استنتاج أن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر محدداً العدد المشتق للدالة f على اليمين في الصفر.</p> <p>أ. بين أن : $\forall x \in]1, 2[: \frac{f(x) - f(2)}{x-2} > \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$</p> <p>ب. أستعمل مبرهنة التزايدات المئوية على المجال $[x, 2]$.</p> <p>ب. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار في النقطة 2.</p> <p>أ. ضع جدول تغيرات الدالة f.</p> <p>ب. بين أن : $\exists \alpha \in]1, \frac{3}{2}[/ f(\alpha) = 0$</p> <p>ج. أدرس تغير المنحنى (C).</p> <p>د. أنشئ المنحنى (C) في المعلم (O, \bar{i}, \bar{j}).</p> <p>7. لتكن φ الدالة العددية المعرفة بما يلي :</p> $\forall x \in [1, +\infty[: \varphi(x) = f(x+2)$ <p>أ. بين أن : $\forall x \in [1, +\infty[: \frac{2}{x+2} < \varphi(x) < \frac{2}{x}$</p> <p>ب. استنتاج أن : $\forall x \in [1, +\infty[: \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} < \varphi(x) < \frac{2}{x}$</p> <p>ج. نعتبر المتالية العددية $(u_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بما يلي :</p> $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n = \varphi\left(\frac{n^2}{1}\right) + \varphi\left(\frac{n^2}{2}\right) + \dots + \varphi\left(\frac{n^2}{n}\right)$ <p>باستعمال السؤال (7-ب)، بين أن :</p> $\forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{n+1}{n} - \frac{2(n+1)(2n+1)}{3n^3} < u_n < \frac{n+1}{n}$ <p>(تكير : $\sum_{p=1}^n p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)</p> <p>ثُم استنتاج أن $(u_n)_{n \geq 1}$ متقاربة محدداً نهايتها.</p> <p>التمرين 26: ليكن a عدداً حقيقياً حيث $a < 1$ ولتكن f_a الدالة العددية لمتغير حقيقي x والمعرفة بما يلي :</p> $f_a(x) = \arccos\left(\frac{a + \cos(x)}{1 + a \cos(x)}\right)$ <p>أ. أثبت أنه : $\forall x \in \mathbb{R} : 1 + a \cos(x) > 0$</p> <p>ب. أوجد D مجموعة تعريف الدالة f_a.</p> <p>2. أثبت أنه يمكن الاقتصار على المجال $[0, \pi]$ لدراسة الدالة f_a.</p>	<p>التمرين 24: لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0, 8]$ بما يلي :</p> $f(x) = \sqrt{\left(4 - \sqrt[3]{x^2}\right)^3}$ <p>أ. بين أن : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - 8}{x} = -\infty$</p> <p>ب. بين أن الدالة f تنقصصية قطعاً على المجال $[0, 8]$.</p> <p>ج. بين أن الدالة f تقابل من $[0, 8]$ نحو مجال يتم تحديده.</p> <p>2. ليكن (C) و (C') المنحنيين المماثلين للدالة f ولتقلبها العكسي f^{-1} على التوالي في معلم متعمد منظم (O, \bar{i}, \bar{j}).</p> <p>أ. بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ هو محور تماثل المنحنى (C).</p> <p>ب. استنتاج تعبير $f^{-1}(x)$ بدالة x.</p> <p>ج. أحسب النهاية $\lim_{\substack{x \rightarrow 8 \\ x < 8}} \frac{f(x)}{x-8}$.</p> <p>د. أرسم المنحنى (C).</p> <p>3. نعتبر نقطتين $A(8, 0)$ و $B(0, 8)$ والدالة g المعرفة على $[0, 8]$ بما يلي :</p> $g(x) = f(x) + x - 8$ <p>أ. بين أن : $\exists \alpha \in]0, 8[/ g'(\alpha) = 0$</p> <p>ب. استنتاج أن المنحنى (C) مماس مواز للمستقيم (AB) في نقطة M_0 أقصولها α، ثم حدد α.</p> <p>4. نعتبر المتالية العددية $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :</p> $\begin{cases} \alpha < x_0 < 8 \\ \forall n \in \mathbb{N} : x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$ <p>أ. مثل في المعلم السابق على محور الأفاصيل النقط التي أقصايلها x_0 و x_1 و x_2 و x_3.</p> <p>ب. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : \alpha < x_n < 8$</p> <p>ج. بين أن المتالية $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ رتيبة.</p> <p>د. استنتاج أن المتالية $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة.</p> <p>5. أحسب :</p> <p>نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :</p> $\begin{cases} f(x) = \arcsin(x-1) - \sqrt{2x-x^2} + 2 - \frac{\pi}{2}; x \in [0, 2] \\ f(x) = x - \sqrt{x^2-4}; x \in]2, +\infty[\end{cases}$ <p>(C) هو المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعمد منظم (O, \bar{i}, \bar{j}).</p> <p>1. أ. حدد D مجموعة تعريف الدالة f. هل الدالة f متصلة في النقطة $x_0 = 2$؟</p> <p>ب. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.</p>
---	--

هذا الملف تم تحميله من موقع Talamid.ma

<p>و $f^{(n)}$ متصلة على المجال $[a, b]$. لتكن x_1 و x_2 و ... و x_n أعداد حقيقة بحيث :</p> <p>$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$: $f(x_i) = 0$ و $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$</p> <p>$\forall x \in [a, b]$ ، $\exists c \in [a, b]$ / . بين أن :</p> $f(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \prod_{i=1}^n (x - x_i)$ <p>نضع : $M = \max_{x \in [a, b]} f^{(n)}(x)$. بين أن :</p> $\forall x \in [a, b] : f(x) \leq \frac{M}{n!} \prod_{i=1}^n x - x_i $ <p>$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$: $f'(x_i) \leq \frac{M}{n!} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_i - x_j$. بين أن :</p> <p>العميم : بين أن :</p> $\forall x \in [a, b] : f'(x) \leq \frac{M}{n!} \sum_{i=1}^n \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x - x_j \right)$ <p>ما زالت يمكن أن تستنتج من أجل $n = 2$ و $x_1 = a$ و $x_2 = b$:</p> <p>التمرين 29 :</p>
<p>1. لتكن f و g دالتي عدديتين متصلتين على مجال $[a, b]$ وقابلتين للاشتغال على المجال $[a, b]$. بين أن :</p> $\exists c \in [a, b] : [f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c)$ <p>بما يكفي استعمال الدالة العددية :</p> $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto [f(b) - f(a)] \times [g(x) - g(a)]$ $- [g(b) - g(a)] \times [f(x) - f(a)]$ <p>ملاحظة : إذا كان $g(a) \neq g(b)$ و $g'(c) \neq 0$ ، فإن :</p> $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ <p>2. أ. بين أنه إذا كان $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ و $f(a) = g(a) = 0$:</p> $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ <p>فإن :</p> $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{\arctan(x) - \frac{\pi}{3}}{x - \sqrt{3}}$ <p>ب. أحسب :</p> <p>ج. انته :</p> <p>أعط مثلاً مضاداً .</p>

<p>ب. بين أنه : $\forall x \in [0, \pi] : f_a'(x) = \frac{\sqrt{1-a^2}}{1+a \cos(x)}$</p> <p>لتكن φ_a الدالة العددية لمتغير حقيقي المعرفة على المجال $[0, \pi]$ بما يلي :</p> $\varphi_a(x) = \frac{1}{1+a \cos(x)} - \frac{1}{1+a}$ <p>أ. أدرس ، حسب قيم الوسيط الحقيقي a ، تغيرات الدالة φ_a .</p> <p>ب. استنتاج أنه :</p> $\forall (c, x) \in \mathbb{R}^2 : 0 < c < x < \pi \Rightarrow \varphi_a(c) \leq \varphi_a(x) $ <p>ج. بتطبيق مبرهنة الترايدات المثلثية على الدالة :</p> <p>د. استنتاج أن f_a قابلة للاشتغال على اليسار في النقطة π .</p> <p>5. أعط جدول تغيرات الدالة f_a على المجال $[0, \pi]$.</p> <p>6. لتكن g_a الدالة المعرفة من المجال $[0, \pi]$ نحو المجال $[0, \pi]$ بما يلي :</p> $g_a(x) = f_a(x)$ <p>أ. بين أن g_a تقابل .</p> <p>ب. أثبت أن : $(g_a)^{-1} = g_{-a}$</p> <p>7. ليكن (C_a) المنحنى الممثل للدالة f_a على المجال $[-\pi, \pi]$ في المستوى المرتبط إلى معلم متعدد منتظم (O, \vec{i}, \vec{j}) في المعلم $(C_{-\frac{1}{2}}, C_{\frac{1}{2}})$.</p> <p>التمرين 27 :</p> <p>1. لتكن f دالة قابلة للاشتغال مرتبة على مجال $[a, b]$ بحيث :</p> $a < b \quad f(a) = f(b)$ <p>بين أن :</p> $\forall x \in [a, b] ; \exists c \in [a, b] / f(x) = (x - a)(x - b) \frac{f''(c)}{2}$ <p>ما زالت يمكن أن تستنتج بالنسبة لمنحنى الدالة f إذا كان لدينا :</p> $\forall x \in [a, b] : f''(x) > 0$ <p>3. لتكن f دالة قابلة للاشتغال ثلاثة مرات على المجال $[a, b]$ حيث $b < a$؛ ولتكن x_1 و x_2 و x_3 ثلاثة أعداد حقيقة بحيث :</p> $a \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq b$ <p>و $\forall i \in \{1, 2, 3\} : f(x_i) = 0$</p> <p>بين أن :</p> $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \frac{f'''(c)}{3!}$ <p>التمرين 28 : ليكن a و b عددين حقيقين حيث $a < b$ ولتكن $(n \geq 2)$ دالة عددية قابلة للاشتغال n مرتبة حيث $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$</p>
--