

## (I) عموميات.

### 1- تعريف:

نسمي متتالية عددية كل تطبيق  $u$  من جزء  $I$  من  $\mathbb{N}$  نحو  $\mathbb{R}$   
 $u: I \rightarrow \mathbb{R}$   
 $n \rightarrow u(n)$

### ترميز:

- \* نرمز ل  $u(n)$  بالرمز  $u_n$ .
- \* نرمز للمتتالية  $u$  بالرمز:  $(U_n)_{n \in I}$
- \*  $u_n$  يسمى الحد ذا المد  $n$ .

### ملاحظة:

- 1- لا يجب الخلط بين:  $(U_n)_{n \in I}$  التي تمثل التطبيق  $u$  و  $u_n$  الذي يمثل عدد حقيقي.
- و  $\{U_n\}_{n \in I}$  التي تمثل مجموعة القيم التي تأخذها المتتالية.
- 2- نقول إن المتتالية  $(U_n)_{n \in I}$  منتهية إذا كانت  $I$  منتهية ونقول إنها غير منتهية إذا كانت  $I$  غير منتهية.

### أمثلة:

نعتبر المتتالية  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  بحيث  $U_n = \sqrt{n^2 + 1}$   
 لدينا:  $u_3 = \sqrt{10}$ ;  $u_2 = \sqrt{5}$ ;  $u_1 = \sqrt{2}$ ;  $u_0 = 1$   
 نعتبر المتتالية  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  بحيث  $u_n = (-1)^n$   
 $u_3 = -1$ ;  $u_2 = 1$ ;  $u_1 = -1$ ;  $u_0 = 1$   
 $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{-1, 1\}$

### ملاحظة:

يمكن لمتتالية أن تكون معرفة بالعلاقة الصريحة لحددها العام أو بالترجع وذلك حينما يتم حساب حد ما بالرجوع إلى حدود سابقة.

### أمثلة:

نعتبر المتتالية  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  بحيث  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$   
 لدينا:  $u_1 = 2u_0 - 3 = -1$   
 $u_2 = 2u_1 - 3 = -5$

نعتبر المتتالية  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  بحيث  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \end{cases}$   
 لدينا:  $u_2 = 2u_1 - u_0 = 3$   
 $u_3 = 2u_2 - u_1 = 4$

## 2- تساوي متتاليتين

### تعريف:

نقول إن  $(U_n)_{n \in I}$  و  $(V_n)_{n \in J}$  متساويتين إذا وفقط إذا كان:  
 $\begin{cases} I = J \\ (\forall n \in I) u_n = v_n \end{cases}$

## 3- العمليات على المتتاليات:

نعرف مجموع وجداء متتاليتين وضرب عدد في متتالية كما يلي:

$$\begin{aligned} (U_n)_{n \in I} + (V_n)_{n \in I} &= (U_n + V_n)_{n \in I} \\ (U_n)_{n \in I} \cdot (V_n)_{n \in I} &= (U_n \cdot V_n)_{n \in I} \\ \lambda (U_n)_{n \in I} &= (\lambda U_n)_{n \in I} \end{aligned}$$

## 4- المتتالية الدورية:

### تعريف:

نقول إن المتتالية  $(U_n)_{n \geq n_0}$  إذا وفقط إذا وجد عدد طبيعي غير منعدم  $p$  بحيث  $(\forall n \geq n_0) U_{n+p} = U_n$   
 - أصغر عدد  $p$  يحقق الشرط يسمى دور المتتالية.

### مثال:

نعتبر المتتالية  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  بحيث  $U_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$   
 لدينا:  $(\forall n \geq n_0) u_{n+6} = \cos\left(\frac{(n+6)\pi}{3}\right)$   
 $= \cos\left(\frac{n\pi}{3} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) = U_n$   
 إذن  $(U_n)$  دورية دورها 6.

## (II) المتتاليات المحدودة:

### تعريف:

نقول إن المتتالية  $(U_n)_{n \in I}$ :  
 مكبورة، إذا وفقط إذا كان:  $(\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in I) u_n \leq M$   
 مصغورة، إذا وفقط إذا:  $(\exists m \in \mathbb{R})(\forall n \in I) m \leq u_n$   
 محدودة إذا وفقط إذا كانت مكبورة ومصغورة يعني:  
 $(\exists m, M \in \mathbb{R})(\forall n \in I) m \leq u_n \leq M$

### ملاحظة:

تكون المتتالية  $(U_n)_{n \in I}$  محدودة إذا وفقط إذا:  
 $(\exists M > 0)(\forall n \in I) |u_n| \leq M$

### أمثلة:

1- نعتبر المتتالية  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  بحيث  $u_n = \frac{1}{n}$   
 لدينا:  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) n \geq 1$   
 يعني:  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) 0 < \frac{1}{n} \leq 1$   
 إذن:  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) 0 < u_n \leq 1$   
 إذن  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  محدودة.

2- نعتبر المتتالية  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  بحيث  $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$   
 لدينا:  $|u_n| = \frac{1}{n^2 + 1}$   
 ولدينا:  $n^2 \geq 0$   
 $n^2 + 1 \geq 1$   
 يعني:  $\frac{1}{n^2 + 1} \leq 1$

### أمثلة:

1- نعتبر المتتالية  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  بحيث  $u_n = 3n - 4$   
لندرس رتبة  $(U_n)$ :  
لدينا:  $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 4 - (3n - 4) = 3n - 1 - 3n + 4 = 3 > 0$   
إذن  $(U_n)$  تزايدية قطعاً.

2- نعتبر المتتالية  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  بحيث:  $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$   
لندرس الرتبة:  
وجدنا سابقاً أن  $u_n \geq 2$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ )  
- لندرس رتبة  $(U_n)$

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n + 2} - u_n$$

$$\text{لدينا: } = \frac{u_n + 2 - u_n^2}{\sqrt{u_n + 2} + u_n}$$

لندرس إشارة:  $-u_n^2 + u_n + 2$   
لندرس إشارة:  $-x^2 + x + 2$   
 $\Delta = 9$

$$x_2 = -1; \quad x_1 = 2$$

|            |           |      |     |     |           |     |
|------------|-----------|------|-----|-----|-----------|-----|
|            | $-\infty$ | $-1$ |     | $2$ | $+\infty$ |     |
| $-x^2+x+2$ |           | $-$  | $0$ | $+$ | $0$       | $-$ |

ولدينا  $u_n \geq 2$  إذن:  $-u_n^2 + u_n + 2 \leq 0$   
ومنه  $u_{n+1} - u_n \leq 0$   
إذن  $(U_n)$  تناقصية.

### طريقة أخرى:

لدينا:  $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n + 2} - \sqrt{u_{n-1} + 2}$   
 $= \frac{u_n - u_{n-1}}{\sqrt{u_n + 2} + \sqrt{u_{n-1} + 2}}$   
إذن إشارة  $u_{n+1} - u_n$  هي إشارة  $u_n - u_{n-1}$ :  
إذن  $u_{n+1} - u_n$  له إشارة ثابتة هي إشارة  $u_1 - u_0$   
ولدينا:  $u_1 - u_0 = \sqrt{5} - 3 < 0$   
إذن  $u_{n+1} - u_n < 0$   
ومنه  $(U_n)$  تناقصية.

### (IV) دراسة بعض المتتاليات الترجعية:

#### 1- المتتاليات الحسابية:

##### تعريف:

نقول إن المتتالية  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  حسابية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي  $r$   
بحيث  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = u_n + r$   
- العدد  $r$  يسمى أساس هذه المتتالية.  
و  $u_0$  الحد الأول لهذه المتتالية.

##### ملاحظة:

- تكون المتتالية  $(U_n)$  حسابية إذا وفقط إذا كان الفرق بين حدين متتابعين ثابتاً وهذه الثابتة هي الأساس.  
- كل متتالية حسابية تكون معرفة بعددها الأول وأساسها. أو بعدها وأساسها.

يعني:  $|u_n| \leq 1$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ )

إذن  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  محدودة.

3- نعتبر المتتالية  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  بحيث:  $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$

لنبين أن  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  مصغورة ب 2:

يعني:  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 2 \leq u_n$

نستعمل الاستدلال بالتراجع:

لدينا من أجل  $n = 0$  :  $u_0 = 3 \geq 2$

إذن الخاصية صحيحة من أجل  $n = 0$ .

نفترض أن الخاصية صحيحة من أجل  $n$  يعني  $u_n \geq 2$

لنبين أنها صحيحة من أجل  $n+1$  يعني  $u_{n+1} \geq 2$ .

لدينا:  $u_n \geq 2$

يعني  $u_n + 2 \geq 4$

يعني  $\sqrt{u_n + 2} \geq 2$

إذن  $u_{n+1} \geq 2$

### طريقة أخرى:

$$u_{n+1} - 2 = \sqrt{u_n + 2} - 2$$

$$= \frac{(u_n + 2) - 4}{\sqrt{u_n + 2} + 2} = \frac{u_n - 2}{\sqrt{u_n + 2} + 2} \geq 0$$

لدينا:

لأن  $u_n \geq 2$

إذن  $u_{n+1} \geq 2$

إذن الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$

وبالتالي  $u_n \geq 2$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ )

ومنه  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  مصغورة ب 2.

### (III) المتتالية الرتيبة:

#### تعريف:

نقول إن  $(u_n)_{n \geq n_0}$

تزايدية، إذا وفقط إذا كان:  $(\forall n \geq n_0) \quad u_n \leq u_{n+1}$

تزايدية قطعاً:  $(\forall n \geq n_0) \quad u_n < u_{n+1}$

تناقصية:  $(\forall n \geq n_0) \quad u_n \geq u_{n+1}$

قطعاً:  $(\forall n \geq n_0) \quad u_n > u_{n+1}$

ثابتة إذا وفقط إذا كان:  $(\forall n \geq n_0) \quad u_n = u_{n+1}$

#### ملاحظة:

← من أجل دراسة رتبة المتتالية  $(U_n)$  نقوم بدراسة إشارة:

$$u_{n+1} - u_n$$

- إذا كان  $u_{n+1} - u_n \geq 0$  فإن  $(U_n)$  تزايدية.

- إذا كان  $u_{n+1} - u_n \leq 0$  فإن  $(U_n)$  تناقصية.

- إذا كان  $u_{n+1} - u_n = 0$  فإن  $(U_n)$  ثابتة.

← نقول إن المتتالية  $(U_n)$  رتيبة إذا كانت تزايدية أو تناقصية.

← تكون المتتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$

- تزايدية:  $(\forall p, q \geq n_0) \quad p \leq q \Rightarrow u_p \leq u_q$

- تناقصية:  $p \leq q \Rightarrow u_p \geq u_q$

- ثابتة:  $p < q \Rightarrow u_p = u_q$

### أمثلة:

1- نعتبر المتتالية  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  بحيث:  $u_n = -5n + 1$

لنبين أن  $(U_n)$  حسابية:

$$U_{n+1} - U_n = -5(n+1) + 1 - (-5n + 1) = -5$$

لدينا:

إذن المتتالية  $(U_n)$  أساسها  $r = -5$  وحدها الأول:  $u_0 = 1$ .

2- لتكن  $(U_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r = 3$  وحدها

الأول  $u_0 = -10$

لنحسب  $u_5$ :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

$$u_{n+1} = u_n + 3$$

نعلم أن:

$$u_1 = u_0 + 3 = -7$$

$$u_2 = u_1 + 3 = -4$$

$$u_3 = u_2 + 3 = -1$$

$$u_4 = u_3 + 3 = 2$$

$$u_5 = u_4 + 3 = 5$$

إذن:

### (b) خاصية مميزة:

نعتبر المتتالية  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) U_{n+1} - U_n = U_n - U_{n-1} \Leftrightarrow (U_n) \text{ حسابية}$$

$$\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) 2U_n = U_{n+1} + U_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) U_n = \frac{U_{n+1} + U_{n-1}}{2}$$

### خاصية:

تكون المتتالية  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  حسابية إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) U_n = \frac{U_{n-1} + U_{n+1}}{2}$$

$$U_{n-1} + U_{n+1} = 2U_n \text{ يعني}$$

### ملاحظة:

تكون الأعداد  $a, b, c$  في هذا الترتيب ثلاث حدود لمتتالية حسابية

إذا وفقط إذا كان  $a + c = 2b$

### (c) الحد العام لمتتالية حسابية:

لتكن  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية حسابية حددها الأول  $u_0$  وأساسها  $r$ :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) U_{n+1} = U_n + r$$

نعلم أن:

$$u_1 = u_0 + r$$

$$u_2 = u_1 + r$$

$$u_3 = u_2 + r$$

.

.

.

$$u_n = u_{n-1} + r$$

بجمع أطراف المتفاوتات نحصل على:

$$u_n = u_0 + \underbrace{r + r + \dots + r}_n$$

$$u_n = u_0 + nr$$

أي

### خاصية:

لتكن  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية حسابية أساسها  $r$  وحدها الأول  $u_0$ .

$$(\forall n \in \mathbb{N}) U_n = U_0 + nr \text{ لدينا:}$$

### ملاحظة:

$$U_n = U_1 + (n-1)r \text{ إذا كان الحد الأول هو } u_1:$$

بصفة عامة: إذا كان  $u_p$  و  $u_n$  حدين من متتالية حسابية أساسها  $r$

$$\text{فإن } u_n = u_p + (n-p)r \text{ (ترتيب } p \text{ غير مهم).}$$

### أمثلة:

1- لتكن  $(U_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r = 4$  وحدها

$$\text{الأول } u_1 = -10$$

$$\text{لنحسب } u_{100}$$

لدينا:

$$u_{100} = u_1 + (100-1)r$$

$$= u_1 + 99r = -10 + 99 \times 4$$

$$= -10 + 396 = 386 = u_{100}$$

2-  $(U_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r = -3$  و  $u_{20} = 100$

$$\text{لنحسب } u_5$$

لدينا:

$$u_5 = u_{20} + (5-20)r$$

$$= 100 + 45 = 145.$$

و

$$u_0 = u_5 + (0-5)r$$

$$= 145 + 15 = 160.$$

3-  $(U_n)$  متتالية حسابية حددها الأول  $U_0$  وأساسها  $r$  بحيث

$$U_{20} = 100 \text{ و } U_{10} = 30$$

حدد الحد العام:

لنحدد  $r$ :

$$\text{لدينا: } u_{20} = u_{10} + (20-10)r$$

$$\text{يعني: } r = \frac{u_{20} - u_{10}}{10} = \frac{100 - 30}{10}$$

$$\text{يعني: } r = 7$$

$$\text{إذن: } (\forall n \in \mathbb{N}) u_n = u_{10} + (n-10)r$$

$$= 30 + 7n - 70$$

$$= 7n - 40$$

$$\text{إذن } (\forall n \in \mathbb{N}) u_n = 7n - 40$$

### (d) مجموع حدود متتابعة متتالية حسابية:

لتكن  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية حسابية أساسها  $r$  وحدها الأول  $u_0$

$$\text{لنحسب } S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$\text{لدينا: } S = u_0 + u_1 + \dots + u_k + \dots + u_{n-1} + u_n$$

$$\text{و } S = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \dots + u_{n-k} + \dots + u_0$$

$$2S = (u_0 + u_n) + (u_1 + u_{n-1}) + \dots + (u_k + u_{n-k}) + \dots + (u_n + u_0)$$

$$\text{ولدينا: } u_k = u_0 + kr$$

$$u_{n-k} = u_0 + (n-k)r$$

$$\text{إذن: } u_k + u_{n-k} = u_0 + u_0 + nr$$

$$= u_0 + u_n$$

$$\text{إذن } (\forall k \in \mathbb{N}) u_k + u_{n-k} = u_0 + u_n$$

$$2S = \underbrace{(u_0 + u_n) + (u_0 + u_n) + \dots + (u_0 + u_n)}$$

## 2- المتتالية الهندسية:

### (a) تعريف:

نقول إن المتتالية  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي  $q$  بحيث:  
 $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} = q \cdot u_n$   
 $q$  يسمى أساس  $(U_n)$ .

### ملاحظات:

- \* تكون متتالية التي حدودها غير منعدمة هندسية إذا وفقط إذا كان خارج حدين متتابعين ثابت.
- \* تكون المتتالية هندسية معرفة بأحد حدودها وأساسها.
- \* إذا كان  $u_0 = 0$  فإن  $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n = 0$
- \* إذا كان  $q = 0$  فإن  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) u_n = 0$
- \* إذا كان  $q = 1$  فإن  $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n = u_0$

### (b) خاصية مميزة:

تكون المتتالية  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  هندسية إذا وفقط إذا كان:  
 $u_{n+1} \cdot u_{n-1} = u_n^2$

### ملاحظة:

تكون الأعداد  $a, b, c$  في هذا الترتيب ثلاث حدود متتابعة لمتتالية هندسية إذا وفقط إذا كان:  
 $a \cdot c = b^2$

### (c) الحد العام لمتتالية هندسية:

لتكن  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية هندسية أساسها  $q \neq 0$  وحدها الأول  $u_0 \neq 0$  لنحسب  $u_n$  بدلالة  $n$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} = q u_n \quad \text{لدينا}$$

$$u_1 = q u_0 \quad \text{إن}$$

$$u_2 = q u_1$$

⋮

$$u_n = q u_{n-1}$$

بضرب أطراف المتساويات نجد:  
 $\underbrace{u_n = u_0 \cdot q \cdot q \cdot \dots \cdot q}_n$

$$u_n = u_0 \cdot q^n \quad \text{إن}$$

وهذه العلاقة تبقى صحيحة إذا كان  $q = 0$  أو  $u_0 = 0$

### خاصية:

لتكن  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  مجموعة هندسية أساسها  $q$  وحدها الأول  $u_0$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) u_n = u_0 \cdot q^n \quad \text{لدينا:}$$

### ملاحظة:

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \quad \text{إذا كان } u_1 \text{ هو الحد الأول:}$$

بصفة عامة: إذا كان  $u_p$  و  $u_n$  حدين من مجموعة هندسية أساسها  $q$  فإن:  $u_n = u_p \cdot q^{n-p}$  (ترتيب  $n$  غير مهم).

### (d) مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية:

لتكن  $(u_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q$  وحدها الأول  $u_0$

$$\text{لنحسب: } S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$* \text{ إذا كان } q = 1 \text{ فإن: } (\forall n \in \mathbb{N}) u_n = u_0$$

$$\text{إن } S = \underbrace{u_0 + u_0 + \dots + u_0}_{n+1 \text{ مرة}} = (n+1)u_0$$

$n+1$  مرة

$$2S = (u_0 + u_n)(n+1) \quad \text{إن:}$$

$$S = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$$

### خاصية:

لتكن  $(U_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r$  وحدها الأول  $u_0$  لدينا:

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = (n+1) \frac{(u_0 + u_n)}{2}$$

$u_0$  الحد الأول للمجموع  $S$

$u_n$  الحد الأخير للمجموع  $S$

$n+1$  عدد حدود المجموع  $S$ .

### ملاحظة:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = n \cdot \frac{u_1 + u_n}{2}$$

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = (n-p+1) \frac{(u_p + u_n)}{2}$$

### أمثلة:

(1) أحسب:  $S = 43 + 47 + 51 + \dots + 203$

نلاحظ أن  $S$  هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية

أساسها  $r = 4$  وحدها الأول  $u_0 = 43$

نضع  $u_n = 203$  ولنحدد

$$u_n = u_0 + nr$$

$$u_n = 43 + 4n$$

$$u_n = 203 \Leftrightarrow 4n = 203 - 43 \quad \text{إن}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{160}{4} = 40$$

$$203 = u_{40} \quad \text{إن}$$

$$\text{إن: } S = u_0 + u_1 + \dots + u_{40} = (40+1) \frac{u_0 + u_{40}}{2}$$

$$= 41 \cdot \frac{43 + 203}{2}$$

$$S = 5043 \quad \text{إن}$$

(2) لنحسب  $S = 1 + 2 + \dots + n$

نلاحظ أن  $S$  هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية

أساسها  $r = 1$  وعدد حدوده هو  $n$ .

$$\text{إن } S = n \cdot \frac{1+n}{2}$$

$$\text{أي } 1 + 2 + \dots + n = n \left( \frac{1+n}{2} \right)$$

(3) لنحسب  $S = 2 + 4 + \dots + 2n$

نلاحظ أن  $S$  هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية

أساسها  $r = 2$  عدد حدوده هو  $n$ .

$$\text{إن } S = n \cdot \frac{2+2n}{2} = n(1+n)$$

إذن توجد متتالية ثابتة وحيدة تحقق (1) هي  $u_n = \alpha$  مع  $\alpha = \frac{b}{1-a}$

(\*) لنحدد جميع المتتاليات التي تحقق (1)

لدينا  $u_n = \alpha$  تحقق (1) إذن:  $\alpha = a\alpha + b$

يعني:  $b = \alpha - a\alpha$

$$(U_n) \text{ تحقق (1)} \Leftrightarrow u_{n+1} = au_n + b$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} = au_n + b$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} - \alpha = a(u_n - \alpha)^*$$

نضع  $v_n = u_n - \alpha$

لدينا:  $* \Leftrightarrow v_{n+1} = av_n$

إذن  $(v_n)$  هندسية أساسها  $a$ .

$$v_n = v_0 \cdot a^n \quad \text{إذن}$$

$$v_n = v_0 \cdot a^n \quad \text{أي}$$

$$v_n = (u_0 - \alpha)a^n \quad \text{ويعني}$$

$$v_n = u_n - \alpha \quad \text{ولدينا:}$$

$$u_n = v_n + \alpha \quad \text{يعني}$$

$$u_n = (u_0 - \alpha)a^n + \alpha \quad \text{يعني}$$

إذن المتتاليات التي تحقق (1) هي  $u_n = (u_0 - \alpha)a^n + \alpha$

حيث  $x = ax + b$  حل للمعادلة  $\alpha$  و  $u_0 \in \mathbb{R}$

**خاصية:**

من أجل البحث عن جميع المتتاليات التي تحقق

العلاقة  $u_{n+1} = au_n + b$  مع  $a \neq 1$  و  $b \neq 0$

نقوم بحل المعادلة  $x = ax + b$  ليكن  $\alpha$  حلها.

نضع  $v_n = u_n - \alpha$  ثم نبين أن  $(v_n)$  هندسية أساسها سيكون  $v$

نستنتج الحد العام ل  $(v_n)$  ثم نستنتج الحد العام ل  $(u_n)$ .

**مثال:**

حدد الحد العام للمتتالية  $(u_n)$ :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$$

لنحل المعادلة  $x = 2x - 3$

يعني  $x = 3$

نضع  $v_n = u_n - 3$  لنبين أن  $(v_n)$  هندسية.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 3$$

$$= 2u_n - 3 - 3$$

$$= 2u_n - 6$$

$$= 2(u_n - 3) = 2v_n$$

إذن  $(v_n)$  هندسية أساسها  $q = 2$  وحدها الأول:  $v_0 = u_0 - 3 = -2$

$$v_n = v_0 \cdot q$$

$$= -2 \cdot 2^n$$

$$v_n = -2^{n+1}$$

$$u_n = v_n + 3 \quad \text{لدينا} \quad v_n = u_n - 3 \quad \text{يعني}$$

$$u_n = -2^{n+1} + 3 \quad \text{يعني}$$

\* إذا كان  $q \neq 1$  فإن:

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_n \quad \text{لدينا:}$$

$$u_k = u_0 q^k \quad \text{ولدينا}$$

$$\text{إذن: } S = u_0 + u_0 q + u_0 q^2 + \dots + u_0 q^{n-1} + u_0 q^n$$

$$(2) \quad qS = u_0 q + u_0 q^2 + u_0 q^3 + \dots + u_0 q^n + u_0 q^{n+1}$$

من (1) - (2) نجد:

$$S - qS = u_0 - u_0 q^{n+1}$$

$$S = u_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{يعني:}$$

**خاصية:**

لتكن  $(U_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q$  وحدها الأول  $u_0$

لدينا:

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \begin{cases} u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}; & q \neq 1 \\ (n+1)u_0; & q = 1 \end{cases}$$

$u_0$ : الحد الأول للمجموع  $S$ .

$(n+1)$ : عدد حدود المجموع  $S$ .

**ملاحظة:**

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p \cdot \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \quad \text{بصفة عامة:}$$

**أمثلة:**

(1) لنحسب:  $S = 3 + 3 \times 2 + 3 \times 2^2 + \dots + 3 \times 2^n$

نلاحظ أن  $S$  هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها

$q = 2$  وعدد حدوده:  $n+1$

$$\text{إذن: } S = 3 \cdot \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2}$$

$$= 3 \cdot \frac{1 - 2^{n+1}}{-1} = -3(1 - 2^{n+1}) = 3(2^{n+1} - 1)$$

(2) ليكن  $x \neq 1$  لنحسب:  $S = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$

نلاحظ أن  $S$  هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها

وعدد حدوده  $n+1$ .

$$\text{إذن: } S = 1 \cdot \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

$$\text{إذن } 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

**3- المتتالية التي تحقق:  $U_{n+1} = au_n + b$  مع  $a \neq 1$  و  $b \neq 0$**

نعتبر العلاقة  $U_{n+1} = au_n + b$  مع  $a \neq 1$  و  $b \neq 0$

(\*) لنحدد المتتاليات الثابتة التي تحقق العلاقة (1):

نضع  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n = \alpha$

$$((U_n) \text{ تحقق (1)}) \Leftrightarrow u_{n+1} = au_n + b$$

$$\Leftrightarrow \alpha = a\alpha + b$$

$$\Leftrightarrow (1-a)\alpha = b$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{b}{1-a}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n v_{n+1} - v_n u_{n+1} = 0 \quad \text{يعني}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{u_n}{v_n} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \quad \text{يعني}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{u_n}{v_n} = \gamma \quad \text{هذا يعني أن } \frac{u_n}{v_n} \text{ ثابتة يعني:}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n = \gamma v_n \quad \text{يعني:}$$

وهذا تناقض لأن  $(u_n)$  و  $(v_n)$  غير متناسبتين.

$$\text{إذن } \Delta_0 \neq 0 \text{ ومنه: } (\forall n \in \mathbb{N}) \Delta_n \neq 0$$

إذن النظمة (S) تقبل حلا وحيدا.  $(\alpha, \beta)$

لنبين أن  $\alpha$  و  $\beta$  لا يتعلقان ب  $n$ :

$$\Delta_n^\alpha = \begin{vmatrix} w_n & v_n \\ w_{n+1} & v_{n+1} \end{vmatrix} = w_n \cdot v_{n+1} - w_{n+1} \cdot v_n$$

بنفس الطريقة نبين أن  $(\Delta_n^\alpha)$  هندسية أساسها  $-b$

$$\Delta_n^\alpha = \Delta_0^\alpha \cdot (-b)^n \quad \text{إذن}$$

$$\alpha = \frac{\Delta_n^\alpha}{\Delta_n} = \frac{\Delta_0^\alpha (-b)^n}{\Delta_0 (-b)^n} \quad \text{إذن}$$

$$= \frac{w_0 v_1 - w_1 v_0}{u_0 v_1 - u_1 v_0}$$

إذن  $\alpha$  ثابتة، وبنفس الطريقة نبين أن  $\beta$  ثابتة.

إذن يوجد  $\alpha$  و  $\beta$  من  $\mathbb{R}$  بحيث:  $w_n = \alpha u_n + \beta v_n$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ).

وبالتالي المتتاليات التي تحقق (1) هي المتتاليات التي تكتب على

$$\text{شكل } w_n = \alpha u_n + \beta v_n.$$

### (b) البحث عن المتتاليات التي تحقق (1):

لنبحث عن المتتاليات الهندسية التي تحقق (1):

لتكن  $(U_n)$  أساسها  $q \neq 0$  و  $u_0 \neq 0$

$$\text{لدينا } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n = u_0 \cdot q^n$$

$$(U_n \text{ تحقق (1)}) \Leftrightarrow u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$$

$$\Leftrightarrow u_0 \cdot q^{n+2} = a u_0 q^{n+1} + b u_0 q^n$$

$$\Leftrightarrow u_0 \cdot q^n (q^2 - aq - b) = 0$$

$$\Leftrightarrow q^2 - aq - b = 0$$

### تعريف:

المعادلة  $q^2 - aq - b = 0$  تسمى المعادلة المميزة للعلاقة (1).

نعتبر إذن المعادلة  $q^2 - aq - b = 0$  (E)

$$\Delta = a^2 + 4b$$

إذا كان  $\Delta > 0$  فإن (E) تقبل حلين حقيقيين مختلفين  $q_1$  و  $q_2$ .

إذن:  $u_n = q_1^n$  و  $v_n = q_2^n$  تحققان (1)

$$\text{ولدينا: } \frac{V_n}{U_n} = \left( \frac{q_2}{q_1} \right)^n \neq cte \quad \text{لأن } q_1 \neq q_2$$

إذن  $(u_n)$  و  $(v_n)$  غير متناسبتين.

إذن المتتاليات التي تحقق (1) هي:

$$w_n = \alpha u_n + \beta v_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n$$

إذا كان  $\Delta = 0$  فإن (E) تقبل حلا وحيدا:  $q = \frac{a}{2}$

إذن المتتالية  $u_n = q^n$  تحقق العلاقة (1)

نضع  $v_n = n u_n$  لنبين أن  $(V_n)$  تحقق (1)

### 4- المتتاليات التي تحقق: $b \neq 0, u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$

نعتبر العلاقة (1):  $b \neq 0, u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$

### (a) خاصيات:

#### خاصية (1):

إذا كانت  $(u_n)$  و  $(v_n)$  ممتثلتان تحققان العلاقة (1) فإن كل متتالية

على شكل:  $w_n = \alpha u_n + \beta v_n$  حيث  $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

#### برهان:

نفترض أن  $(u_n)$  و  $(v_n)$  تحققان (1)

نضع  $w_n = \alpha u_n + \beta v_n$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ )

لنبين أن  $(w_n)$  تحقق العلاقة (1):

$$\text{يعني: } w_{n+2} = a w_{n+1} + b w_n$$

لدينا:

$$w_{n+2} = \alpha u_{n+2} + \beta v_{n+2}$$

$$= \alpha (a u_{n+1} + b u_n) + \beta (a v_{n+1} + b v_n)$$

$$= a (\alpha u_{n+1} + \beta v_{n+1}) + b (\alpha u_n + \beta v_n)$$

$$= a w_{n+1} + b w_n$$

إذن  $(w_n)$  تحقق (1).

#### خاصية (2):

إذا كانت  $(U_n)$  و  $(V_n)$  متتاليتين تحققان (1) وغير متناسبتين

(لا يوجد  $\gamma$  بحيث  $v_n = \gamma u_n$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ) يعني  $\frac{v_n}{u_n} \neq cste$ ) فإن

المتتاليات التي تحقق (1) هي المتتاليات التي تكتب على شكل

$$w_n = \alpha u_n + \beta v_n \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

#### برهان:

لتكن  $(u_n)$  و  $(v_n)$  غير متناسبتين وتحققان (1)

وجدنا من خلال ما سبق أن كل متتالية على شكل:

$$w_n = \alpha u_n + \beta v_n \quad \text{تحقق (1).}$$

عكسيا: لتكن  $(w_n)$  متتالية تحقق (1)

لنبين أنه يوجد  $\alpha$  و  $\beta$  من  $\mathbb{R}$  بحيث  $w_n = \alpha u_n + \beta v_n$

لدينا:  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad w_n = \alpha u_n + \beta v_n$

إذن:

$$\begin{cases} w_n = \alpha u_n + \beta v_n \\ w_{n+1} = \alpha u_{n+1} + \beta v_{n+1} \end{cases}$$

$$(S) \begin{cases} \alpha u_n + \beta v_n = w_n \\ \alpha u_{n+1} + \beta v_{n+1} = w_{n+1} \end{cases}$$

نحصل إذن على النظمة:

مجاهلها هما  $\alpha$  و  $\beta$ :

$$\text{لدينا: } \Delta_n = \begin{vmatrix} u_n & v_n \\ u_{n+1} & v_{n+1} \end{vmatrix} = u_n v_{n+1} - v_n u_{n+1}$$

$$\text{لدينا: } \Delta_{n+1} = u_{n+1} v_{n+2} - v_{n+1} u_{n+2}$$

$$u_{n+1} (a v_{n+1} + b v_n) - v_{n+1} (a u_{n+1} + b u_n)$$

$$\Delta_{n+1} = b u_{n+1} v_n - b v_{n+1} u_n$$

$$= -b (u_n v_{n+1} - v_n u_{n+1}) = -b \Delta_n$$

إذن  $(\Delta_n)$  هندسية أساسها  $-b$  وحدها الأول  $\Delta_0$ .

$$\Delta_n = \Delta_0 \cdot q^n = (-b)^n \cdot \Delta_0$$

لنبين أن  $\Delta_0 \neq 0$

نفترض العكس يعني  $\Delta_0 = 0$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \Delta_n = 0$$

### خاصية:

نعتبر العلاقة  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$  ( $b \neq 0$ )  
لتكن (E):  $q^2 - aq - b = 0$  المعادلة المميزة لـ (1)

ليكن  $\Delta = a^2 + 4b$

إذا كان  $\Delta > 0$  فإن (E) تقبل حلين حقيقيين مختلفين  $q_1$  و  $q_2$ . وتكون المتتاليات التي تحقق العلاقة (1) هي المتتاليات التي تكتب على شكل:  $w_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n$  حيث  $\alpha$  و  $\beta$  من  $\mathbb{R}$ .

إذا كان  $\Delta = 0$  فإن (E) تقبل حلا وحيدا  $q$ . وتكون المتتاليات التي تحقق (1) هي المتتاليات التي تكتب على شكل:  $w_n = (\alpha + \beta n)q^n$  حيث  $\alpha$  و  $\beta$  من  $\mathbb{R}$ .

إذا كان  $\Delta < 0$  فإن (E) تقبل حلين عقديين مترافقين  $q$  و  $\bar{q}$ . وتكون المتتاليات التي تحقق (1) هي المتتاليات التي تكتب على شكل:  $w_n = r^n (\alpha \cos n\theta + \beta \sin n\theta)$  حيث  $\alpha$  و  $\beta$  من  $\mathbb{R}$ .

### تمرين تطبيقي:

حدد الحد العام للمتتالية  $(u_n)$  في الحالات التالية:

$$\begin{cases} u_0 = 1, & u_1 = -1 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases} \quad -1$$

$$\begin{cases} u_0 = 1, & u_1 = 2 \\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n \end{cases} \quad -2$$

$$\begin{cases} u_0 = 1, & u_1 = -1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n \end{cases} \quad -3$$

1- المعادلة المميزة هي:  $q^2 - 5q + 6 = 0$  (E):  
 $\Delta = 25 - 24 = 1$

$q_2 = 3$  ;  $q_1 = 2$   
إذن:  $u_n = \alpha 2^n + \beta 3^n$

ولدينا:  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = -1 \end{cases}$  يعني  $\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 2\alpha + 3\beta = -1 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$$

$$\Delta_\alpha = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 1 = 4$$

$$\Delta_\beta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3$$

إذن  $\begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = -3 \end{cases}$

إذن  $u_n = 4 \cdot 2^n - 3 \cdot 3^n$   
 $u_n = 2^{n+2} - 3^{n+1}$

2- المعادلة المميزة هي:  $q^2 - 6q + 9 = 0$  (E):  
لنحل (E):  $\Delta = 36 - 36 = 0$

إذن  $q = \frac{6}{2} = 3$

إذن:  $u_n = (\alpha + \beta n) \cdot 3^n$

ولدينا:  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \end{cases}$  يعني  $\begin{cases} \alpha = 1 \\ 3(\alpha + \beta) = 2 \end{cases}$

يعني  $v_{n+2} = av_{n+1} + bv_n$

$$\begin{aligned} \text{لدينا: } v_{n+2} - (av_{n+1} + bv_n) &= (n+2)q^{n+2} - a(n+1)q^{n+1} - bq^n \\ &= nq^{n+2} + 2q^{n+2} - anq^{n+1} - aq^{n+1} - bq^n \\ &= nq^n (q^2 - aq - b) + q^{n+1}(2q - a) = 0 \end{aligned}$$

لأن  $q^2 - aq - b = 0$  و  $q = \frac{a}{2}$

إذن  $(V_n)$  تحقق (1).

ولدينا  $\frac{V_n}{U_n} = n \neq cste$  إذن  $(u_n)$  و  $(v_n)$  غير متناسبتين. وبالتالي

المتتاليات التي تحقق (1) على التي تكتب على شكل:

$$\begin{aligned} w_n &= \alpha u_n + \beta v_n \\ &= \alpha q^n + \beta n \cdot q^n \\ w_n &= (\alpha + \beta n)q^n \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

إذا كان  $\Delta < 0$  فإن (E) تقبل حلين عقديين مترافقين في  $\mathbb{C}$  هما:

$$\bar{q} \text{ و } q = e^{i\theta}$$

لدينا:  $q^2 - aq - b = 0$

يعني  $q^{n+2} - aq^{n+1} - bq^n = 0$

$$r^{n+2} \cdot e^{i(n+2)\theta} - a \cdot r^{n+1} \cdot e^{i(n+1)\theta} - b r^n \cdot e^{in\theta} = 0$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow r^{n+2} (\cos((n+2)\theta) + i \sin((n+2)\theta)) \\ &\quad - ar^{n+1} (\cos((n+1)\theta) + i \sin((n+1)\theta)) \\ &\quad - br^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow [r^{n+2} \cos((n+2)\theta) - ar^{n+1} \cos((n+1)\theta) - br^n \cos n\theta] \\ &\quad + i[r^{n+2} \sin((n+2)\theta) - ar^{n+1} \sin((n+1)\theta) - br^n \sin n\theta] = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^{n+2} \cos((n+2)\theta) = ar^{n+1} \cos((n+1)\theta) + br^n \cos n\theta \\ r^{n+2} \sin((n+2)\theta) = ar^{n+1} \sin((n+1)\theta) + br^n \sin n\theta \end{cases} *$$

نضع:  $u_n = r^n \cos n\theta$

و  $v_n = r^n \sin n\theta$

$$* \Leftrightarrow \begin{cases} u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \\ v_{n+2} = av_{n+1} + bv_n \end{cases}$$

إذن  $(u_n)$  و  $(v_n)$  تحققان العلاقة (1)

ولدينا:  $\frac{v_n}{u_n} = \tan(n\theta) \neq cste$

إذن  $(u_n)$  و  $(v_n)$  غير متناسبتين.

وبالتالي المتتاليات التي تحقق (1) هي:

$w_n = \alpha u_n + \beta v_n$  مع  $\alpha$  و  $\beta$  من  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} w_n &= \alpha (r^n \cos n\theta) + \beta (r^n \sin n\theta) \\ &= r^n (\alpha \cos n\theta + \beta \sin n\theta) \end{aligned}$$

أي



إذن:  $(\forall A)(0)(n_0 \in \mathbb{N}^*) : n > n_0 \Rightarrow u_n > A$

إذن:  $\lim U_n = +\infty$

بنفس الطريقة نبين أن:

$$(p \in \mathbb{N}^*) \lim n^p = +\infty; \lim \frac{1}{n} = 0; \lim \sqrt[p]{n} = +\infty$$

### ملاحظة:

$$\lim |u_n| = 0 \Leftrightarrow \lim u_n = 0 \leftarrow$$

$$\lim (u_n - l) = 0 \Leftrightarrow \lim u_n = l \leftarrow$$

$$\lim |u_n - l| = 0 \Leftrightarrow \lim u_n = l \leftarrow$$

$$\text{والعكس خاطئ} \quad \lim u_n = l \Rightarrow \lim |u_n| = |l| \leftarrow$$

**مثال:** نعتبر  $u_n = (-1)^n$

$$\lim |u_n| = 1 \quad \text{إذن} \quad |u_n| = 1$$

لكن  $(u_n)$  لا تقبل نهاية.

### 2- مصادق التقارب:

#### خاصية:

(1) لتكن  $(U_n)$  و  $(V_n)$  متتاليتين بحيث:  $|u_n - l| \leq v_n$  انطلاقاً من صف ما.

لدينا:  $\lim v_n = 0 \Rightarrow \lim u_n = l$

(2) لتكن  $(u_n)$  و  $(V_n)$  متتاليتين بحيث:  $u_n \leq v_n$  انطلاقاً من صف ما:

$$\lim u_n = +\infty \Leftrightarrow \lim v_n = +\infty$$

$$\lim v_n = -\infty \Leftrightarrow \lim u_n = -\infty$$

(3) لتكن  $(u_n)$  و  $(w_n)$  ثلاث متتاليات بحيث:

$$w_n \leq u_n \leq v_n \text{ انطلاقاً من صف ما.}$$

إذا كانت  $(u_n)$  و  $(w_n)$  متقاربتين ولهما نفس النهاية  $l$  فإن:  $(u_n)$  متقاربة و  $\lim u_n = l$ .

### أمثلة:

$$1- \text{نعتبر المتتالية } U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\text{لدينا: } u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

ليكن  $n \in \mathbb{N}^*$

لدينا:  $(\forall K \in \{1, 2, 3, \dots, n\}) :$

$$\sqrt{1} \leq \sqrt{K} \leq \sqrt{n}$$

$$\text{يعني } (\forall K \in \{1, 2, 3, \dots, n\}) \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{K}} \leq 1$$

$$\text{إذن } \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \sum_{k=1}^n 1$$

$$\text{يعني } n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \leq u_n \leq n$$

$$\text{يعني } \sqrt{n} \leq u_n \leq n$$

$$\text{إذن } (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sqrt{n} \leq u_n$$

$$\text{ولدينا } \lim \sqrt{n} = +\infty \quad \text{إذن} \quad \lim u_n = +\infty$$

2- نعتبر المتتالية:  $U_n = q^n$

\* إذا كان  $q > 1$

نضع  $a = q - 1$  (مع  $a > 0$ ) يعني  $q = 1 + a$

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -\frac{1}{3} \end{cases} \text{ يعني}$$

$$\text{إذن: } u_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right) 3^n$$

3- المعادلة المميزة هي:  $(E): q^2 - q + 1 = 0$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 \quad \text{لنحل } (E)$$

$$\text{إذن: } q_2 = \bar{q}_1; \quad q_1 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{لدينا: } q_1 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i \frac{\pi}{3}}$$

$$\text{إذن: } u_n = 1^n \left( \alpha \cos n \frac{\pi}{3} + \beta \sin n \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\text{يعني: } u_n = \alpha \cos n \frac{\pi}{3} + \beta \sin n \frac{\pi}{3}$$

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha \cos \frac{\pi}{3} + \beta \sin \frac{\pi}{3} = -2 \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = -2 \end{cases} \text{ ولدينا:}$$

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = \frac{-5}{\sqrt{3}} \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} \alpha = 1 \\ \frac{1}{2} \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \beta = -2 \end{cases} \text{ يعني:}$$

$$\text{إذن: } u_n = \cos n \frac{\pi}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{3} \sin n \frac{\pi}{3}$$

### V- نهاية متتالية:

#### 1- تعريف

نعتبر المتتالية  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$

نقول إن المتتالية  $(U_n)$  تتوّل إلى  $+\infty$  إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall A)(0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}^*) : n > n_0 \Rightarrow U_n > A$$

ونكتب:  $\lim U_n = +\infty$

نقول إن المتتالية  $(U_n)$  تتوّل إلى  $-\infty$  إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall A)(0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}^*) : n > n_0 \Rightarrow U_n < -A$$

ونكتب  $\lim U_n = -\infty$

نقول إن المتتالية  $(U_n)$  تتوّل إلى العدد الحقيقي  $l$  إذا وفقط إذا

$$\text{كان: } (\forall \varepsilon)(0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}^*) : n > n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$

ونكتب:  $\lim U_n = l$  ونقول في هذه الحالة إن المتتالية  $(U_n)$

متباعدة إذا وفقط إذا كانت غير متقاربة.

### مثال:

نعتبر المتتالية:  $U_n = \sqrt{n}$

لنبين أن  $\lim U_n = +\infty$  يعني:  $(\forall A)(0)(n_0 \in \mathbb{N}^*) : n > n_0 \Rightarrow u_n > A$

ليكن:  $A > 0$  لنبحث عن  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  بحيث  $n > n_0 \Rightarrow u_n > A$

لدينا  $u_n > A$

$$\text{يعني } \sqrt{n} > A \text{ يعني } n > A^2$$

يكفي أن نأخذ  $n_0 \geq A^2$

$$\text{مثلاً: } n_0 = E(A^2) + 1$$

$$\text{لدينا: } n > n_0 \Rightarrow n > A^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} > A$$

$$\Rightarrow u_n > A$$



$$\lim u_n = \lim v_n \quad \begin{cases} \lim u_n = 0 \\ \lim v_n = 0 \end{cases} \quad \text{لكن}$$

**خاصية (2):** مقبولة.

+ كل متتالية تزايدية ومكبورة. متقاربة.  
+ كل متتالية تناقصية ومصغورة. متقاربة.

**حالة خاصة:**

(\*) كل متتالية تناقصية وموجبة. متقاربة.  
(\*) كل متتالية تزايدية وسالبة. متقاربة.

**تمرين تطبيقي:**

بين أن  $(U_n)$  متقاربة في الحالات التالية:

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad -1$$

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad -2$$

**4- العمليات على المتتاليات المتقاربة.**

**خاصية:**

إذا كانت  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتين متقاربتين فإن المتتاليات  $(\alpha u_n)$ ,  $(u_n + v_n)$ ,  $(u_n v_n)$  متقاربة

$$\lim (u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n$$

$$\lim (u_n v_n) = \lim u_n \cdot \lim v_n$$

$$\lim (\alpha u_n) = \alpha \lim u_n$$

- وإذا كانت  $\lim v_n \neq 0$  فإن  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$  متقاربة.

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n} \quad \text{و}$$

$$u_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n} \quad \text{مثال : نعتبر المتتالية:}$$

$$\lim u_n = \lim \frac{3^n \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{3^n \left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)} = \lim \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} = 1$$

**(5) توسيع مفهوم النهاية:**

| $\lim u_n$ | $\lim v_n$ | $\lim (u_n + v_n)$ |
|------------|------------|--------------------|
| $l$        | $l'$       | $l + l'$           |
| $l$        | $\infty$   | $\infty$           |
| $+\infty$  | $+\infty$  | $+\infty$          |
| $-\infty$  | $-\infty$  | $-\infty$          |
| $+\infty$  | $-\infty$  | شكل غير محدد       |

| $\lim u_n$ | $\lim v_n$  | $\lim (u_n v_n)$                    |
|------------|-------------|-------------------------------------|
| $l$        | $l'$        | $ll'$                               |
| $l \neq 0$ | $\infty$    | $\infty$ (الإشارة)                  |
| $\infty$   | $\infty$    | $\infty$                            |
| $0$        | $\infty$    | شكل غير محدد                        |
| $\lim u_n$ | $\lim v_n$  | $\lim \left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ |
| $l$        | $l' \neq 0$ | $\frac{l}{l'}$                      |

$$q^n = (1+a)^n \quad \text{لدينا:}$$

$$= \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot 1^{n-k} \cdot a^k = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot a^k$$

$$= C_n^0 \cdot a_0 + C_n^1 \cdot a^1 + \sum_{k=2}^n C_n^k \cdot a^k = 1 + na + \sum_{k=2}^n C_n^k \cdot a^k$$

$$q^n - (1 + na) = \sum_{k=2}^n C_n^k a^k \geq 0 \quad \text{إذن}$$

ولدينا  $\lim 1 + na = +\infty$  إذن  $\lim q^n = +\infty$  إذا كان  $q = 1$

فإن  $\lim q^n = 1$  إذا كان  $-1 < q < 1$  مع  $q \neq 0$

$$\lim |q^n| = \lim |q|^n = \lim \frac{1}{\left(\frac{1}{|q|}\right)^n}$$

ولدينا  $-1 < q < 1$  يعني  $|q| < 1$

يعني  $\frac{1}{|q|} > 1$  إذن من خلال ما سبق:

$$\lim \frac{1}{|q|^n} = +\infty$$

$$\lim \frac{1}{\left(\frac{1}{|q|}\right)^n} \quad \text{إذن}$$

ومنه  $\lim q^n = 0$

\* إذا كان  $q \leq -1$

نقبل أن  $(U_n)$  لا تقبل نهاية.

**خاصية:**

$$\lim q^n = \begin{cases} +\infty & ; & q > 1 \\ 1 & ; & q = 1 \\ 0 & ; & -1 < q < 1 \\ & ; & q \leq -1 \end{cases}$$

**(3) التقارب والرتابة:**

**خاصية (1):**

لتكن  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية عددية.  
إذا كانت  $(U_n)$  متقاربة وموجبة انطلاقاً من صف ما فإن:  
 $\lim u_n \geq 0$

**استنتاج:**

(\*) لتكن  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتين متقاربتين  
إذا كانت  $u_n \leq v_n$  انطلاقاً من صف ما.  
فإن  $\lim u_n \leq \lim v_n$

**ملاحظة:**

$(u_n)$  و  $(v_n)$  متقاربتان.

إذا كان  $u_n \leq v_n$  فإن  $\lim u_n \leq \lim v_n$

$$u_n < v_n \not\Rightarrow \lim u_n < \lim v_n$$

$$\text{مثال: } v_n = \frac{1}{n}, \quad u_n = \frac{1}{n+1}$$

لدينا:  $u_n < v_n$

لدينا:

$$v_n - u_n = \frac{n! + n + 1}{(1+n)!} = \frac{n!}{(1+n)!} + \frac{n+1}{(1+n)!}$$

$$= \frac{1}{1+n} + \frac{1}{n!}$$

ولدينا:  $(n-1)! \geq 1$  إذن  $n(n-1)! \geq n$  أي  $n! \geq n$

$$0 < \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n}$$

$$\lim \frac{1}{n} = 0 \quad \text{لدينا}$$

$$\lim \frac{1}{n!} = 0 \quad \text{إذن}$$

$$\lim \frac{1}{1+n} = 0 \quad \text{أيضا}$$

$$\lim (v_n - u_n) = 0 \quad \text{إذن}$$

ومنه  $(U_n)$  و  $(V_n)$  متحاديّتان.

## VII - المتتاليات الترجعية. $u_{n+1} = f(u_n)$

مثال:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{u_n} \end{cases} \quad \text{نعتبر المتتالية:}$$

لندرس سلوك المتتالية  $(U_n)$

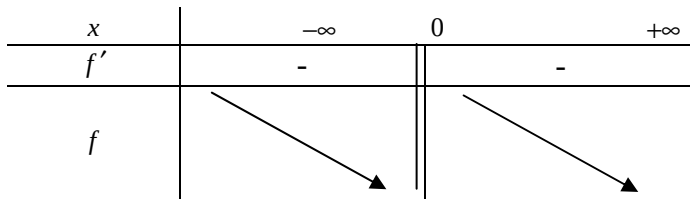
$$f(x) = \frac{x+2}{x} \quad \text{نعتبر الدالة:}$$

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad \text{إذن } (U_n) \text{ تصبح:}$$

لننشئ  $\xi_f$ :

$$D_f = \mathbb{R}^*$$

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2}$$



|            |          |              |
|------------|----------|--------------|
| $l \neq 0$ | 0        | $\infty$     |
| $l$        | $\infty$ | 0            |
| $\infty$   | $\infty$ | شكل غير محدد |
| 0          | 0        | شكل غير محدد |

## VI - المتتاليات المتحادية:

تعريف:

نقول إن  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  و  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متحاديّتان إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n \leq V_n \quad (*)$$

$(U_n)$  تزايدية و  $(V_n)$  تناقصية.

$$\lim (V_n - U_n) = 0 \quad (*)$$

خاصية:

إذا كانت  $(U_n)$  و  $(V_n)$  متحاديّتين فإنهما متقاربتان ولهما نفس النهاية.

برهان: لدينا  $U_n \leq V_n$

لدينا  $(U_n)$  تزايدية إذن  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_0 \leq u_n$

و  $(V_n)$  تناقصية إذن  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n \leq v_0$

لدينا إذن  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$

إذن  $(U_n)$  تزايدية ومكبورة ب  $v_0$  إذن متقاربة.

$(V_n)$  تناقصية ومصغورة ب  $u_0$  إذن متقاربة.

$$\lim (v_n - u_n) = 0 \quad \text{لدينا}$$

$$\lim v_n - \lim u_n = 0 \quad \text{يعني}$$

$$\lim v_n = \lim u_n \quad \text{أي}$$

إذن  $(U_n)$  و  $(V_n)$  متقاربتان ولهما نفس النهاية.

مثال:

$$v_n = 1 + \frac{1}{n!} \quad ; \quad u_n = \frac{n}{1+n}$$

لنبين أن  $(U_n)$  و  $(V_n)$  متحاديّتان.

لدينا:

$$v_n - u_n = 1 + \frac{1}{n!} - \frac{n}{1+n}$$

$$= \frac{(1+n)! + (1+n) - n(n!)}{(1+n)!} = \frac{(1+n)n! + (1+n) - n(n!)}{(1+n)!}$$

$$= \frac{n! + n + 1}{(1+n)!} > 0$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n < v_n \quad \text{إذن}$$

\* لدينا:

$$v_{n+1} - v_n = 1 + \frac{1}{(1+n)!} - 1 - \frac{1}{n!}$$

$$= \frac{1}{n!} \left( \frac{1}{(n+1)} - 1 \right) = \frac{1}{n!} \left( \frac{-n}{n+1} \right) < 0$$

إذن  $(V_n)$  تناقصية.

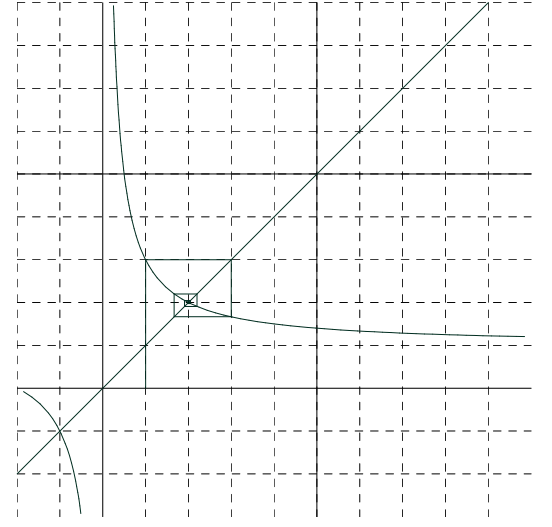
\* لدينا:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1}$$

$$= \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0$$

إذن  $(U_n)$  تزايدية.

\* لنحسب:  $\lim (v_n - u_n)$



من خلال التمثيل المباني يتبين أن سلوك المتتالية كالتالي:  
 -  $(U_n)$  ليست رتيبة.

-  $(U_n)$  مصغرة ب  $u_0$  ومكبورة ب  $u_1$

-  $(u_2)$  تؤول إلى 2 الذي هو حل المعادلة  $f(x) = x$

- المتتالية:  $v_n = u_{2n}$  تزايدية.

- المتتالية:  $w_n = u_{2n+1}$  تناقصية.

-  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n < w_n$

-  $(v_n)$  و  $(w_n)$  متحاديان.

ثم نقوم بالبرهان على هذه النتائج.

**خاصية:**

لتكن  $f$  دالة معرفة على مجال  $I$  ونعتبر المتتالية:

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

إذا كانت  $f(I) \subset I$  فإن المتتالية معرفة.

إذا كانت  $f$  متصلة على  $I$  و  $(u_n)$  متقاربة فإن نهايتها  $l$  تحقق

$$f(l) = l$$