# تمارين: مبرهنة التزايدات المنتهية

الثانية سلك بكالوريا علوم رياضية

## تمارين محلولة

التمرين1

نعتبر المتتالية $(u_n)$ بحيث $u_0=\frac{1}{2}$ ; $u_{n+1}=g(u_n)$ $\forall n\in\mathbb{N}$

حيث $\forall x\in[0;+\infty[$ $g(x)=\arctan\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)$

1- بين أن المعادلة $g(x)=x$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في $]0;1[$

2- بين أن $\forall n\in\mathbb{N}$ $|u_{n+1}-\alpha|\prec\frac{4}{5}|u_n-\alpha|$

3- استنتج أن $(u_n)$ متقاربة محددا نهايتها

الحل

1- نبين أن المعادلة $g(x)=x$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في $]0;1[$

نعتبر $h(x)=g(x)-x$ على $[0;1]$ لدينا $h$ متصلة على $[0;1]$

لدينا $h'(x)=\frac{-1}{2(x^2+1)}-1$ ومنه $h$ تناقصية قطعا على $[0;1]$

لدينا $h(0)\times h(1)=\frac{\pi}{4}\left(\arctan\left(\sqrt{2}-1\right)-1\right)$

$0\prec\sqrt{2}-1\prec\tan\frac{\pi}{4}\prec\tan 1$ ( لأن $\frac{\pi}{4}\prec 1$ , $\sqrt{2}-1\prec 1$ ) ومنه $0\prec\arctan\left(\sqrt{2}-1\right)\prec 1$

إذن $h(0)\times h(1)\prec 0$

إذن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في $]0;1[$

أي أن المعادلة $g(x)=x$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في $]0;1[$

2- نبين أن $\forall n\in\mathbb{N}$ $|u_{n+1}-\alpha|\prec\frac{4}{5}|u_n-\alpha|$

لدينا $g(x)\in]0;1[$ $\forall x\in[0;+\infty[$

و حيث $u_0=\frac{1}{2}$ ; $u_{n+1}=g(u_n)$ $\forall n\in\mathbb{N}$ فان $0\prec u_n\prec 1$ $\forall n\in\mathbb{N}$ ( نبين ذلك بالترجع)

الدالة $g$ متصلة في مجال مغلق طرفاه $\alpha$ و $u_n$ وقابلة للاشتقاق في مجال مفتوح طرفاه $\alpha$ و $u_n$

ومنه يوجد $c$ محصور قطعا بين $\alpha$ و $u_n$ حيث $g(u_n)-g(\alpha)=g'(c)(u_n-\alpha)$

أي أن $u_{n+1}-\alpha=\frac{-1}{2\left(1+c^2\right)}(u_n-\alpha)$ ومنه $|u_{n+1}-\alpha|=\frac{1}{2\left(1+c^2\right)}|(u_n-\alpha)|$

و حيث أن $0\prec c\prec 1$ فان $\frac{4}{5}\succ\frac{1}{2}\succ\frac{1}{2\left(1+c^2\right)}\succ\frac{1}{4}$ ومنه $|u_{n+1}-\alpha|\prec\frac{4}{5}|u_n-\alpha|$ $\forall n\in\mathbb{N}$

3- نستنتج أن $(u_n)$ متقاربة محددا نهايتها

لدينا $|u_{n+1}-\alpha|\prec\frac{4}{5}|u_n-\alpha|$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$$|u_1-\alpha|\prec\frac{4}{5}|u_0-\alpha|$$

$$|u_2-\alpha|\prec\frac{4}{5}|u_1-\alpha|$$

. . .

. . .

. . .

$$|u_n-\alpha|\prec\frac{4}{5}|u_{n-1}-\alpha|$$

بضرب أطراف المتفاوتات و الاختزال نحصل على $|u_n-\alpha|\prec\left(\frac{4}{5}\right)^n|u_0-\alpha|$

وحيث $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n|u_0-\alpha|=0$ فان $(u_n)$ متقاربة و $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha$

التمرين2

لتكن $f$ دالة عددية معرفة على $[0;1]$ بما يلي $f(x)=\frac{1}{4}\tan\frac{1}{x+1}$

1- بين أن $f$ قابلة للاشتقاق على $[0;1]$ و أن $\forall x\in[0;1]\quad |f'(x)|\le\frac{1}{4\cos^2 1}$

2- بين أن $f([0;1])\subset[0;1]$

3- أ- بين أنه : $\exists!\alpha\in]0;1[\quad f(\alpha)=\alpha$

ب- استنتج أن $\forall x\in]0;1[-\{\alpha\}\quad |f(x)-\alpha|\le\frac{1}{4\cos^2 1}|x-\alpha|$

4- نعتبر المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $\begin{cases}u_0\in]0;1[-\{\alpha\}\\ u_{n+1}=\frac{1}{4}\tan\left(\frac{1}{u_n+1}\right)\end{cases}$

أ- بين أن $\forall n\in\mathbb{N}\quad |u_n-\alpha|\le\left(\frac{1}{4\cos^2 1}\right)^n|u_0-\alpha|$

ب- استنتج أن $(u_n)$ متقاربة و حدد نهايتها.

الحل

$f$ دالة عددية معرفة على $[0;1]$ بما يلي $f(x)=\frac{1}{4}\tan\frac{1}{x+1}$

4- نبين أن $f$ قابلة للاشتقاق على $[0;1]$ و أن $\forall x\in[0;1]\quad |f'(x)|\le\frac{1}{4\cos^2 1}$

$x\to\frac{1}{x+1}$ قابلة للاشتقاق على $[0;1]$ و $/k\in\mathbb{Z}\quad \frac{1}{x+1}\ne\frac{\pi}{2}+k\pi\quad \forall x\in[0;1]$

إذن $f$ قابلة للاشتقاق على $[0;1]$

و $\forall x\in[0;1] \quad f'(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{-1}{(x+1)^2}\right)\left[1+\tan^2\frac{1}{x+1}\right]=\frac{1}{4}\left(\frac{-1}{(x+1)^2}\right)\left[\frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{x+1}\right)}\right]$

$$\forall x\in[0;1] \quad |f'(x)|=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)\left[\frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{x+1}\right)}\right]$$

الدالتان $x\to\cos x$ و $x\to\frac{1}{(x+1)^2}$ تناقصيتان على $[0;1]$ و $\frac{1}{2}\le\frac{1}{x+1}\le 1 \quad \forall x\in[0;1]$

ومنه $\frac{1}{\cos^2 1}\le\frac{1}{\cos^2\frac{1}{x+1}}\le 1$ ; $\frac{1}{4}\le\frac{1}{(x+1)^2}\le 1 \quad \forall x\in[0;1]$

إذن $|f'(x)|\le\frac{1}{4\cos^2 1} \quad \forall x\in[0;1]$

5- نبين أن $f([0;1])\subset[0;1]$

$f'(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{-1}{(x+1)^2}\right)\left[\frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{x+1}\right)}\right] \quad \forall x\in[0;1]$ و منه $f'(x)\le 0 \quad \forall x\in[0;1]$

إذن $f$ تناقصية على $[0;1]$ ومنه $f([0;1])=\left[\frac{1}{4}\tan\frac{1}{2};\frac{1}{4}\tan 1\right]\subset[0;1]$

6- أ- نبين أنه : $\exists!\alpha\in]0;1[ \quad f(\alpha)=\alpha$

نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $[0;1]$ بـ $g(x)=f(x)-x \quad \forall x\in[0;1]$

$g$ متصلة على $[0;1]$

$g(0)=\frac{1}{4}\tan(1)\ge 0$ و $g(1)=-1+\frac{1}{4}\tan\frac{1}{2}\le 0$

إذن $\exists!\alpha\in]0;1[ \quad f(\alpha)=\alpha$

ب- نستنتج أن $|f(x)-\alpha|\le\frac{1}{4\cos^2 1}|x-\alpha| \quad \forall x\in]0;1[-\{\alpha\}$

ليكن $x\in]0;1[-\{\alpha\}$

لدينا $f$ متصلة على مجال مغلق طرفاه $\alpha$ و $x$

$f$ قابلة للاشتقاق على مجال $I$ مفتوح طرفاه $\alpha$ و $x$

ومنه يوجد عدد $c$ ينتمي إلى $I$ حيث $f(x)-f(\alpha)=f'(c)(x-\alpha)$

و حيث أن $|f'(x)|\le\frac{1}{4\cos^2 1} \quad \forall x\in[0;1]$ فان $|f(x)-\alpha|\le\frac{1}{4\cos^2 1}|x-\alpha| \quad \forall x\in]0;1[-\{\alpha\}$

-4
$$\begin{cases} u_0\in]0;1[-\{\alpha\} \\ u_{n+1}=\frac{1}{4}\tan\left(\frac{1}{u_n+1}\right)\end{cases}$$

أ- نبين أن $|u_0-\alpha| \left(\dfrac{1}{4\cos^2 1}\right)^n \geq |u_n-\alpha| \quad \forall n\in\mathbb{N}$

لدينا $f(u_n) = \tan\left(\dfrac{1}{u_n+1}\right)\dfrac{1}{4} = u_{n+1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

نبين بالترجع أن $u_n \in ]0;1[ \quad \forall n\in\mathbb{N}$ ..................

ومنه $|f(u_n)-\alpha| \leq \dfrac{1}{4\cos^2 1}|u_n-\alpha|$ و بالتالي $|u_{n+1}-\alpha| \leq \dfrac{1}{4\cos^2 1}|u_n-\alpha|$

من أجل $n=0$ لدينا $|u_1-\alpha| \leq \dfrac{1}{4\cos^2 1}|u_0-\alpha|$

من أجل $n=1$ لدينا $|u_2-\alpha| \leq \dfrac{1}{4\cos^2 1}|u_1-\alpha|$

...... .......

...... .......

...... .......

$$|u_n-\alpha| \leq \dfrac{1}{4\cos^2 1}|u_{n-1}-\alpha|$$

بضرب أطراف المتفاوتات والاختزال نحصل على $|u_n-\alpha| \leq \left(\dfrac{1}{4\cos^2 1}\right)^n |u_0-\alpha| \quad \forall n\in\mathbb{N}$

ب- نستنتج أن $(u_n)$ متقاربة و حدد نهايتها.

لدينا $|u_n-\alpha| \leq \left(\dfrac{1}{4\cos^2 1}\right)^n |u_0-\alpha| \quad \forall n\in\mathbb{N}$

المتتالية $\left(\left[\dfrac{1}{4\cos 1}\right]^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{1}{4\cos 1}\right]^n = 0$

ومنه $(u_n)$ متقاربة و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

## التمرين3

$(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = g(u_n) \quad \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$

حيث $g(x) = \arctan\sqrt{x+2} \qquad \forall x\in[0;2]$

1- أ ) بين أن $\arctan x \leq x \quad \forall x\in\mathbb{R}^+$

ب) بين أن $0 \leq u_n \leq 2 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

ج) بين أن $(u_n)$ متقاربة

2- أ) بين أن المعادلة $g(x)=x$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ من $]0;2[$

ب) أثبت أن $g'(x) \leq \dfrac{1}{6\sqrt{2}} \quad \forall x\in]0;2[$

ج) بين أن $|u_{n+1}-\alpha| \leq \dfrac{1}{6\sqrt{2}}|u_n-\alpha| \quad \forall n\in\mathbb{N}$ استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

الحل

2- أ ) نبين أن $\arctan x \leq x \quad \forall x\in\mathbb{R}^+$

لدينا $x \to x$ و $x \to \arctan x$ متصلتان على $\mathbb{R}^+$ و قابلتان للاشتقاق على $]0;+\infty[$

$(x)' = x \qquad (\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

لدينا $\dfrac{1}{1+x^2} \prec 1 \quad \forall x \in ]0;+\infty[$ أي $(\arctan x)' \prec (x)' \quad \forall x \in ]0;+\infty[$

و $\arctan 0 = 0$

إذن $\arctan x \le x \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

ب) نبين أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \le u_n \le 2$

من أجل $n = 0$ لدينا $0 \le u_0 \le 2$ لان $u_0 = 2$

نفترض أن $0 \le u_n \le 2$ ونبين أن $0 \le u_{n+1} \le 2$

لدينا $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}(3+x)} \succ 0 \quad \forall x \in [0;2]$ ومنه $g$ تزايدية على $[0;2]$

وحيث أن $0 \le u_n \le 2$ فان $g(0) \le g(u_n) \le g(2)$ أي $g(0) \le u_{n+1} \le g(2)$

لدينا $g(2) = \arctan 2 \le 2 \quad ; \quad g(0) = \arctan \sqrt{2} \ge 0$

ومنه $0 \le u_{n+1} \le 2$ إذن $0 \le u_n \le 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ج) نبين أن $(u_n)$ متقاربة

لندرس رتابة $(u_n)$

لدينا $u_1 = g(u_0) = g(2) = \arctan 2$ ومنه $u_1 \le u_0$

نفترض أن $u_{n+1} \le u_n$ نبين أن $u_{n+2} \le u_{n+1}$

لينا $u_{n+1} \le u_n$

و حيث أن $g$ تزايدية على $[0;2]$ فان $g(u_{n+1}) \le g(u_n)$ أي أن $u_{n+2} \le u_{n+1}$

إذن $u_{n+1} \le u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

ومنه $(u_n)$ تناقصية و بما أن $(u_n)$ مصغورة بالعدد 0 فان $(u_n)$ متقاربة

ج) أ) نبين أن المعادلة $g(x) = x$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ من $]0;2[$

نعتبر الدالة $h$ حيث $h(x) = g(x) - x$

$h$ متصلة على $[0;2]$ قابلة للاشتقاق على $]0;2[$

و $h(0) \times h(2) = (\arctan \sqrt{2})(-2 + \arctan 2) \prec 0$

ومنه المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا في $]0;2[$

لدينا $h'(x) = g'(x) - 1 = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}(3+x)} - 1 = \dfrac{1 - 2\sqrt{x+1}(x+3)}{2\sqrt{x+2}(3+x)}$

وحيث $1 - 2\sqrt{x+1}(x+3) \prec 0 \quad \forall x \in ]0;2[$ فان $h$ تناقصية قطعا على $]0;2[$

إذن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في $]0;2[$

ب) نثبت أن $g'(x) \le \dfrac{1}{6\sqrt{2}} \quad \forall x \in ]0;2[$

ليكن $x \in ]0;2[$ لدينا $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}(3+x)}$

بما أن $0 \prec x \prec 2$ فان $3 \prec x+3 \prec 5$ و $2\sqrt{2} \prec 2\sqrt{x+2} \prec 4$

و بالتالي $6\sqrt{2} \prec 2(x+3)\sqrt{x+2} \prec 20$ ومنه $\frac{1}{6\sqrt{2}} \prec \frac{1}{2\sqrt{x+2}(3+x)}$

إذن $\forall x \in ]0;2[ \quad g'(x) \leq \frac{1}{6\sqrt{2}}$

ج) نبين أن $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{6\sqrt{2}}|u_n - \alpha| \quad \forall n \in \mathbb{N}$ و نستنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$

$g$ متصلة على $[0;2]$ و قابلة للاشتقاق على $]0;2[$ و $\alpha \in ]0;2[$ و $u_n \in [0;2] \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ومنه يوجد $c$ من $]0;2[$ حيث $g(u_n) - g(\alpha) = g'(c)(u_n - \alpha) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

و بالتالي $|g(u_n) - g(\alpha)| = |g'(c)||u_n - \alpha| \quad \forall n \in \mathbb{N}$

و حيث $|g'(c)| \leq \frac{1}{6\sqrt{2}}$ فان $|g(u_n) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{6\sqrt{2}}|u_n - \alpha| \quad \forall n \in \mathbb{N}$

إذن $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{6\sqrt{2}}|u_n - \alpha| \quad \forall n \in \mathbb{N}$

نستنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$

لدينا

$$|u_1 - \alpha| \leq \frac{1}{6\sqrt{2}}|u_0 - \alpha|$$

$$|u_2 - \alpha| \leq \frac{1}{6\sqrt{2}}|u_1 - \alpha|$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{6\sqrt{2}}|u_{n-1} - \alpha|$$

بضرب أطراف المتفاوتات و الاختزال نحصل على

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{6\sqrt{2}}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

و حيث $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{6\sqrt{2}}\right)^n = 0$ فان $\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$