

## تمرين

### تمرين 1

نعتبر أن الدالة العددية  $f$  متصلة على  $[0;1]$  قابلة للاشتراق على  $[0;1]$  بحيث  $f(1) = 1$  و  $f(0) = 0$ .  
بين أن  $\exists c \in ]0;1[ \quad 2cf'(c) = \sqrt{c}$

### تمرين 2

- لتكن  $f$  دالة عددية معرفة على  $[0;1]$  بما يلي
- 7- بين أن  $f$  قابلة للاشتراق على  $[0;1]$  وأن  $\forall x \in [0;1] \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{4\cos^2 1}$
- 8- بين أن  $f([0;1]) \subset [0;1]$
- 9- أ- بين أنه :  $\exists !\alpha \in ]0;1[ \quad f(\alpha) = \alpha$
- ب- استنتج أن  $\forall x \in ]0;1[ - \{\alpha\} \quad |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4\cos^2 1} |x - \alpha|$
- 4- نعتبر المتتالية العددية المعرفة كما يلي :
- $$u_0 \in ]0;1[ - \{\alpha\}$$
- $$u_{n+1} = \frac{1}{4} \tan\left(\frac{1}{u_n + 1}\right)$$
- أ- بين أن  $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4\cos^2 1}\right)^n |u_0 - \alpha|$
- ب- استنتاج أن  $(u_n)$  متقاربة وحدد نهايتها.

## تمرين 3

$$\begin{cases} f(x) = x + 2 - \sqrt{x^2 + 2x} & x < -2 \\ f(x) = \arctan \sqrt{x+2} & x \geq -2 \end{cases}$$

I- لتكن  $f$  الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بـ

-1 أدرس اشتاقاق  $f$  عند -2

-2 حدد الدالة المشتقة للدالة  $f$

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = g(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

II- ليكن  $g$  قصور  $f$  على  $[0; 2]$  و  $(u_n)$  المتالية العددية المعرفة بما يلي

-3 أ) بين أن  $\forall x \in \mathbb{R}^+$   $\arctan x \leq x$

ب) بين أن  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_n \leq 2$

ج) بين أن  $(u_n)$  متقاربة

-2 أ) بين أن المعادلة  $g(x) = x$  تقبل حلًا وحيدًا  $\alpha$  من  $[0; 2]$

$$\forall x \in [0; 2] \quad g'(x) \leq \frac{1}{6\sqrt{2}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \quad \text{استنتج} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{6\sqrt{2}} |u_n - \alpha|$$

## تمرين 4

لتكن  $f$  متصلة على  $[a; b]$  بحيث  $f(a) = f(b) = 0$  و  $f'(a) = 0$

$$\exists c \in \mathbb{N} \quad f'(c) = \frac{f(c)}{c-a}$$

**تمرين 5 مبرهنة LAGRANGE**  
لتكن  $f$  و  $g$  متصلتين على  $[a; b]$  و قابلتين للاشتاقاق على  $[a; b]$  بحيث  $f'(x) \neq 0$  حيث  $a < x < b$

-1 بين أن  $f(b) - f(a) = g(b) - g(a)$

$$\psi(x) = f(x) - f(a) - k(g(x) - g(a)) \quad \text{على } [a; b] \text{ بـ:}$$

أ) حدد  $k$  لكي تكون  $\psi(b) = 0$

$$\exists c \in ]a; b[ \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

تمرين 6

لتكن  $f$  دالة عدديّة قابلة للاشتتاق على  $[0;1]$  بحيث  $f(0) = 0$  و  $f'(x) \neq 0$  لـ  $\forall x \in [0;1]$  وبين أن  $f$  لها إشارة ثابتة على  $[0;1]$

تمرين 7

لتكن  $f$  متصلة على  $[a; b]$  وقابلة للاشتتاق على  $]a; b[$

ليكن  $[x_0; x_0 + h] \subset [a; b]$  بحيث  $x_0 \in ]a; b[$  و  $k \in \mathbb{R}_+^*$

-1- بين أنه:  $\exists \theta \in ]0; 1[ \quad f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0 + \theta h)$

$$-2- \text{تطبيق نعتبر } f(x) = \frac{1}{x+1}$$

حدد  $\theta$  بدلالة  $h$  ثم أحسب  $\lim_{h \rightarrow 0} \theta$