

تمارين

تمرين 1

نعتبر أن الدالة العددية f متصلة على $[0;1]$ قابلة للاشتقاق على $]0;1[$ بحيث $f(1)=1$ و $f(0)=0$
بين أن $\exists c \in]0;1[\quad 2cf'(c) = \sqrt{c}$

تمرين 2

لتكن f دالة عددية معرفة على $[0;1]$ بما يلي $f(x) = \frac{1}{4} \tan \frac{1}{x+1}$

7- بين أن f قابلة للاشتقاق على $[0;1]$ وأن $\forall x \in [0;1] \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{4 \cos^2 1}$

8- بين أن $f([0;1]) \subset [0;1]$

9- أ- بين أنه : $\exists ! \alpha \in]0;1[\quad f(\alpha) = \alpha$

ب- استنتج أن $\forall x \in]0;1[- \{\alpha\} \quad |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4 \cos^2 1} |x - \alpha|$

4- نعتبر المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 \in]0;1[- \{\alpha\} \\ u_{n+1} = \frac{1}{4} \tan \left(\frac{1}{u_n + 1} \right) \end{cases}$

أ- بين أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4 \cos^2 1} \right)^n |u_0 - \alpha|$

ب- استنتج أن (u_n) متقاربة و حدد نهايتها.

تمرين 3

$$I- \text{ لتكن } f \text{ الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بـ } \begin{cases} f(x) = x + 2 - \sqrt{x^2 + 2x} & x < -2 \\ f(x) = \arctan \sqrt{x+2} & x \geq -2 \end{cases}$$

1- أدرس اشتقاق f عند -2

2- حدد الدالة المشتقة للدالة f

$$II- \text{ ليكن } g \text{ قصور } f \text{ على } [0;2] \text{ و } (u_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة بما يلي } \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

3- أ) بين أن $\arctan x \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

ب) بين أن $0 \leq u_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ج) بين أن (u_n) متقاربة

2- أ) بين أن المعادلة $g(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α من $]0;2[$

ب) أثبت أن $\forall x \in]0;2[\quad g'(x) \leq \frac{1}{6\sqrt{2}}$

ج) بين أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{6\sqrt{2}} |u_n - \alpha|$ استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

تمرين 4

لتكن f متصلة على $[a;b]$ بحيث $f(a) = f(b) = 0$ و $f'(a) = 0$

بين أنه $\exists c \in \mathbb{N} \quad f'(c) = \frac{f(c)}{c-a}$

تمرين 5 مبرهنة (LAGRANGE)

لتكن f و g متصلتين على $[a;b]$ وقابلتين للاشتقاق على $]a;b[$ بحيث $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a;b[$

1- بين أن $g(a) \neq g(b)$

2- نعتبر الدالة ψ المعرفة على $[a;b]$ بـ: $\psi(x) = f(x) - f(a) - k(g(x) - g(a))$

(أ) حدد k لكي تكون $\psi(b) = 0$

(ب) استنتج أن $\exists c \in]a; b[\quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

تمرين 6

لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على $[0; 1]$ بحيث $f(0) = 0$ و $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [0; 1]$
بين أن f لها إشارة ثابتة على $[0; 1]$

تمرين 7

لتكن f متصلة على $[a; b]$ و قابلة للاشتقاق على $]a; b[$

ليكن $x_0 \in]a; b[$ و $k \in \mathbb{R}_+^*$ بحيث $[x_0; x_0 + h] \subset [a; b]$
1- بين أنه: $\exists \theta \in]0; 1[\quad f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0 + \theta h)$

2- تطبيق نعتبر $f(x) = \frac{1}{x+1}$

حدد θ بدلالة h ثم أحسب $\lim_{h \rightarrow 0} \theta$