

الاشتقاق و دراسة الدوال

تمرين 1

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{3+x} - 2}{x-1} & x \in [0; 2] - \{1\} \\ f(1) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-600(x^2 - 2x + 1)}{(x - 1)^2 (\sqrt{25x - 24} + (25x - 24))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-600}{(\sqrt{25x - 24} + (25x - 24))} \\ &= -\frac{600}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= -300\end{aligned}$$

إذن : f قابلة للاشتقاق في 1 و $f'(1) = -300$

حساب : $f'(x)$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(\frac{\sqrt{25x^2 - 24} - x}{x - 1} \right)' \\ &= \frac{(\sqrt{25x^2 - 24} - x)'(x - 1) - (\sqrt{25x^2 - 24} - x)(x - 1)'}{(x - 1)^2} \\ &= \frac{\left(\frac{25x}{\sqrt{25x^2 - 24}} - 1 \right)(x - 1) - (\sqrt{25x^2 - 24} - x)}{(x - 1)^2} \\ &= \frac{(25x - \sqrt{25x^2 - 24})(x - 1) - \sqrt{25x^2 - 24}(\sqrt{25x^2 - 24} - x)}{(x - 1)^2 \sqrt{25x^2 - 24}}\end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{25x^2 - 24} - 25x + 24}{(x - 1)^2 \sqrt{25x^2 - 24}}$$

تمرين 4

f قابلة للاشتقاق في a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h^2) - f(a + h)}{h} \quad \text{احسب :}$$

الحل

$$\begin{aligned}\alpha &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h^2) - f(a + h)}{h} \quad \text{نضع :} \\ \alpha &= \lim_{h \rightarrow 0} h \frac{f(a + h^2) - f(a)}{h^2} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} h \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t) - f(a)}{t} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h^2) - f(a + h)}{h} = -f'(a)\end{aligned}$$

تمرين 5

احسب $f'(x)$ في كل حالة :

بين أن $f(x)$ قابلة للاشتقاق في 1

الحل

لتبين أن : f قابلة للاشتقاق في 1

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\sqrt{3 + x} - 2}{x - 1} - \frac{1}{4}}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4\sqrt{3 + x} - (x + 7)}{4(x - 1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x - 1)^2}{4(x - 1)^2 (4\sqrt{3 + x} - (x + 7))}\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\frac{1}{64}$$

تمرين 2

$f(x) = |x^2 + 2x - 15|$ حدد $f'_g(3)$ ؛ $f'_d(3)$ ثم معادلة

نصف المماس ل (C_f) على يسار و على يمين النقطة ذات

الأفصول 3

الحل

$$f'_d(3) = 6 \quad f'_g(3) = -6$$

تمرين 3

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{25x^2 - 24} - x}{x - 1} & x \in \left[\frac{2}{5}\sqrt{6}; +\infty \right] - \{1\} \\ f(1) = 24 \end{cases}$$

ب- بين أن f قابلة للاشتقاق في 1

ج- احسب $f'(x)$

الحل

لتبين أن : f قابلة للاشتقاق في 1

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\sqrt{25x^2 - 24} - x}{x - 1} - 24}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{25x^2 - 24} - (25x - 24)}{(x - 1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{25x^2 - 24 - (25x - 24)^2}{(x - 1)^2 (\sqrt{25x^2 - 24} + (25x - 24))}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f^{-1}(x) = y &\Leftrightarrow f(y) = x \\
 &\Leftrightarrow 2y + \sqrt{3y - 6} = x \\
 &\Leftrightarrow 4y^2 - y(4x + 3) + x^2 + 6 = 0 \\
 4y^2 - y(4x + 3) + x^2 + 6 &= 0 \\
 \Delta &= 24x - 87 \\
 y_1 &= \frac{4x + 3 - \sqrt{24x - 87}}{8} \\
 y_2 &= \frac{4x + 3 + \sqrt{24x - 87}}{8} \text{ أو } \\
 \text{نعتبر : } x=4 \text{ نجد } y_1=2 \text{ و } y_2=2 \\
 \text{بما أن : } f(2) = 4 \text{ فإن : } f^{-1}(x) = y_1 \\
 \text{إذن : } f^{-1}(x) &= \frac{4x + 3 - \sqrt{24x - 87}}{8}
 \end{aligned}$$

-2 بما أن f متصلة ورتبية قطعاً و

$$f([2, +\infty[) = [4, +\infty[$$

$$6 \in [4, +\infty[\text{ و }$$

فإن : المعادلة : $f(x) = 6$ تقبل حلاً وحيداً في المجال I

تمرين 8

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$$

$$I = D_f \text{ حدد}$$

أ- أثبت أن f المعرفة من I نحو J (يجب تحديد J) تقبل دالة عكسية f^{-1} . ثم حدد f^{-1}

الحل

$$I = D_f =]-1, +\infty[$$

أ- f متصلة على D_f قابلة للإشتقاق على $] -1, +\infty[$ (1)

$$\forall x \in]-1, +\infty[\quad f'(x) = \frac{x+1}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$$

$$\forall x \in]-1, +\infty[\quad f'(x) > 0$$

فإن : f تزايدية قطعاً على $] -1, +\infty[$ (2)

$$\text{إذن : } f(]-1, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$$

$$\text{و منه : } f(]-1, +\infty[) = \mathbb{R}$$

من (1) و (2) : f تقبل دالة عكسية f^{-1}

تحديد : f^{-1}

$$\text{ليكن } x \in \mathbb{R} \text{ و } y \in]-1, +\infty[$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \arctan(7x^3 - 5x) \quad \text{ب-} \quad f(x) = \sqrt[3]{x^5 \sqrt[4]{x^3}} \quad \text{أ-} \\
 f(x) &= \arctan \sqrt[4]{3x^2 + 7} \quad \text{د-} \quad f(x) = \frac{\sqrt[4]{3x^2 + 7}}{\sqrt[3]{x^2}} \quad \text{ج-}
 \end{aligned}$$

تمرين 6

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 0 \quad \text{أ-}$$

(C_f) يقبل نصف مماس أفقي يسار النقطة ذات الأفصول 3

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = -\infty \quad \text{ب-}$$

(C_f) يقبل نصف مماس عمودي يمين النقطة ذات الأفصول 3 موجه نحو الأسفل .

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = +\infty \quad \text{ج-}$$

(C_f) يقبل نصف مماس عمودي يمين النقطة ذات الأفصول 3 موجه نحو الأعلى

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = +\infty \quad \text{د-}$$

(C_f) يقبل نصف مماس عمودي يسار النقطة ذات الأفصول 3 موجه نحو الأسفل .

تمرين 7

$$f(x) = 2x + \sqrt{3x - 6}$$

$$I = D_f \text{ حدد}$$

1- أثبت أن f المعرفة من I نحو J (يجب تحديد J) تقبل دالة عكسية f^{-1} . ثم حدد f^{-1}

2- استنتج أن المعادلة : $f(x) = 6$ تقبل حلاً وحيداً في المجال I

الحل

$$f(x) = 2x + \sqrt{3x - 6} \quad \text{1-}$$

$$I = D_f = [2, +\infty[\text{ حدد}$$

f متصلة على $[2, +\infty[$ قابلة للإشتقاق على $]2, +\infty[$

$$f'(x) = 2 + \frac{3}{2\sqrt{3x - 6}}$$

$$\forall x \in]2, +\infty[\quad f'(x) > 0$$

فإن : f تزايدية

$$\text{إذن : } f([2, +\infty[) = [4, +\infty[$$

f تقبل دالة عكسية f^{-1}

تحديد : f^{-1}

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{y + \frac{1}{y}} = x$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 1 = yx^3$$

$$\Leftrightarrow y^2 - yx^3 + 1 = 0$$

$$\Delta = x^6 - 4$$

$$y_2 = \frac{x^3 + \sqrt{x^6 - 4}}{2} \text{ أو } y_1 = \frac{x^3 - \sqrt{x^6 - 4}}{2}$$

$$\text{بالنسبة لـ } x = \sqrt[3]{\frac{5}{4}} \text{ نجد : } y_2 = 2 \text{ و } y_1 \neq 2$$

$$\text{بما أن : } f(2) = \sqrt[3]{\frac{5}{4}} \text{ فإن : } f^{-1}(x) = y_2$$

$$\text{إذن : } f^{-1}(x) = \frac{x^3 + \sqrt{x^6 - 4}}{2} \text{ : } \forall x \in \left[\sqrt[3]{2}; +\infty \right[$$

$$\text{ومنه : } f^{-1} : \left[\sqrt[3]{2}; +\infty \right[\rightarrow \left[1; +\infty \right[\\ x \rightarrow \frac{x^3 + \sqrt{x^6 - 4}}{2}$$

تمرين 10

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan \sqrt{x}$$

حدد $I = D_f$

أ- اثبت أن f المعرفة من I نحو J (يجب تحديد J) تقبل دالة عكسية f^{-1} . ثم حدد f^{-1}

الحل

$$I = D_f = [0; +\infty[$$

(1) f متصلة على D_f قابلة للإشتقاق على $]0; +\infty[$

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}(1+x)}$$

$$\text{بما أن : } f'(x) > 0 \quad \forall x \in]0; +\infty[$$

(2) f تزايدية قطعاً على $[0; +\infty[$

$$\text{إذن : } f([0; +\infty[) = \left[f(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$$

$$\text{ومنه : } f([0; +\infty[) = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right[$$

من (1) و (2) : f تقبل دالة عكسية f^{-1}

تحديد : f^{-1}

$$\text{ليكن } x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right[\text{ و } y \in [0; +\infty[$$

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{\sqrt{y+1}} = x ; xy \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 = x^2(y+1) ; xy \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 - x^2y - x^2 = 0 ; xy \geq 0$$

$$\Delta = x^4 + 4x^2$$

$$y_2 = \frac{x^2 + \sqrt{x^4 + 4x^2}}{2} \text{ أو } y_1 = \frac{x^2 - \sqrt{x^4 + 4x^2}}{2}$$

$$\text{بما أن : } xy \geq 0 \text{ و } y_2 \geq 0$$

$$\text{فإن : } f^{-1}(x) = y_1$$

$$\text{إذن : } f^{-1}(x) = \frac{x^2 - \sqrt{x^4 + 4x^2}}{2} \text{ : } \forall x \in [9; +\infty[$$

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow]-1; +\infty[$$

$$x \rightarrow \frac{x^2 - \sqrt{x^4 + 4x^2}}{2} \text{ : ومنه}$$

تمرين 9

$$x \in [1; +\infty[\quad f(x) = \sqrt[3]{x + \frac{1}{x}}$$

حدد $I = D_f$

أ- اثبت أن f المعرفة من I نحو J (يجب تحديد J) تقبل دالة عكسية f^{-1} . ثم حدد f^{-1}

الحل

$$I = D_f = [1; +\infty[$$

(1) f متصلة على D_f قابلة للإشتقاق على $[1; +\infty[$

$$\forall x \in [1; +\infty[\quad f'(x) = \frac{x^2 - 1}{3x^2 \sqrt[3]{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2}}$$

$$\text{بما أن : } f'(x) > 0 \quad \forall x \in [1; +\infty[$$

(2) f تزايدية قطعاً على $[1; +\infty[$

$$\text{إذن : } f([1; +\infty[) = \left[f(1); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$$

$$\text{ومنه : } f([1; +\infty[) = \left[\sqrt[3]{2}; +\infty[$$

من (1) و (2) : f تقبل دالة عكسية f^{-1}

تحديد : f^{-1}

$$\text{ليكن } x \in \left[\sqrt[3]{2}; +\infty[\text{ و } y \in [1; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 216} \frac{\sqrt[3]{x} - 6}{x - 216} = \lim_{x \rightarrow 216} \frac{x - 216}{(x - 216)(\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} + 9)} \quad -1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 216} \frac{1}{(\sqrt[3]{x^2} + 6\sqrt[3]{x} + 36)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 216} \frac{\sqrt[3]{x} - 6}{x - 216} = \frac{1}{108}$$

أو العدد المشتق : نعتبر : $g(x) = \sqrt[3]{x} - 6$ ؛ $g(6) = 0$

$$g'(6) = \frac{1}{108} \quad ; \quad g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 216} \frac{\sqrt[3]{x} - 6}{x - 216} = g'(6) = \frac{1}{108}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{x+1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt[4]{x+1}^3 + \sqrt[4]{x+1}^2 + \sqrt[4]{x+1} + 1)} \quad -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{x+1} - 1}{x} = \frac{1}{4}$$

أو العدد المشتق : نعتبر : $g(x) = \sqrt[4]{x+1} - 1$

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x + 1} - \sqrt[3]{x^3 + 2} \quad -3$$

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1}{\sqrt[3]{x^3 + x + 1}^2 + \sqrt[3]{x^3 + x + 1}\sqrt[3]{x^3 + 2} + \sqrt[3]{x^3 + 2}^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)}{x^2 \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}\sqrt[3]{1 + \frac{2}{x^3}} + \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x^3}}^2\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x + 1} - \sqrt[3]{x^3 + 2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 32} \frac{\sqrt[5]{x} - 2}{\sqrt[5]{x} + 992 - 4} \quad -4$$

-5 نضع : $t = \sqrt[5]{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{t}{\sqrt[5]{t^5} + t^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{t}{t \left(\sqrt[5]{1 + \frac{1}{t^3}}\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{x^2}} = 1$$

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan \sqrt{y} = x$$

$$\Leftrightarrow \arctan \sqrt{y} = 2x - \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \tan(\arctan \sqrt{y}) = \tan\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y} = \tan\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow y = \tan^2\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \quad (4)$$

$$\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] : \text{لأن } (2) \Rightarrow (1)$$

$$\tan\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \geq 0 : \text{لأن } (4) \Rightarrow (3)$$

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right] : f^{-1}(x) = \tan^2\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) : \text{إن}$$

$$f^{-1} : \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [0; +\infty[$$

$$x \rightarrow \tan^2\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$$

و منه :

تمرين 11

$$\sqrt{a^3 + a^2b} + \sqrt{b^3 + b^2a} = \sqrt{(a+b)^3}$$

- استنتج تبسيطاً :

$$\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4} \sqrt[3]{y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2} \sqrt[3]{y^4}} = \sqrt{\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}\right)^3}$$

الحل

$$\alpha = \left(\sqrt{a^3 + a^2b} + \sqrt{b^3 + b^2a}\right)^2 : \text{نضع}$$

$$\alpha = a^3 + a^2b + b^3 + b^2a + 2\sqrt{(a^3 + a^2b)(b^3 + b^2a)}$$

$$= a^3 + a^2b + b^3 + b^2a + 2\sqrt{2a^3b^3 + a^2b^4 + a^4b^2}$$

$$= a^3 + a^2b + b^3 + b^2a + 2\sqrt{a^2b^2(a+b)^2}$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3$$

$$\sqrt{a^3 + a^2b} + \sqrt{b^3 + b^2a} = \sqrt{(a+b)^3} : \text{إن}$$

$$a = \sqrt[3]{x^2} ; b = \sqrt[3]{y^2} : \text{نعتبر}$$

تمرين 12

احسب

تمرين 13

-1

$$\sqrt[4]{x+1} + \sqrt[4]{1-x} = \sqrt[4]{2}$$

$$\left(\sqrt[4]{x+1} + \sqrt[4]{1-x}\right)^4 = 2$$

$$4\sqrt[4]{(x+1)^3(1-x)} + 6\sqrt[4]{(x+1)^2(1-x)^2} + 4\sqrt[4]{(x+1)(1-x)^3} = 0$$

$$\text{إذن: } (x+1)(1-x) = 0 \text{ و منه: } x = -1 \text{ أو } x = 1$$

$$\text{-2 نضع: } y = \sqrt[3]{x}$$

$$\left(\frac{1-\sqrt[3]{x}}{3-\sqrt[3]{x}}\right)^3 + 125 = 0 \Leftrightarrow \frac{1-y}{3-y} = -5$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{8}{3}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{8}{3}}$$

إذن:

$$\text{-1 نضع: } t = \sqrt[6]{x}$$

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} = 12 \Leftrightarrow t^2 + t^3 = 12$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 4 + t^3 - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)((t+2) + (t^2 + 2t + 4)) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)(t^2 + 3t + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 2$$

$$x = 2^6 = 64$$

إذن:

تمرين 14

$$\text{-1 حساب: } \arctan 2 + \arctan 3$$

$$\text{- نضع: } \alpha = \arctan 2 ; \beta = \arctan 3$$

$$\tan(\alpha + \beta) = -1$$

$$\text{إذن: } (k \in \mathbb{Z}) \quad \alpha + \beta = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\text{لدينا: } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} ; 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{إذن: } 0 < -\frac{\pi}{4} + k\pi < \pi \text{ و } 0 < \alpha + \beta < \pi$$

$$\text{و منه: } 1 < 4k < 5 \text{ إذن: } k = 1$$

$$\text{إذن: } \alpha + \beta = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$$

$$\arctan 2 + \arctan 3 = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{-2 حساب: } \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8}$$

- نضع:

$$\alpha = \arctan \frac{1}{2} ; \beta = \arctan \frac{1}{5} ; \gamma = \arctan \frac{1}{8}$$

$$\tan(\alpha + \beta + \gamma) = 1$$

$$\text{إذن: } (k \in \mathbb{Z}) \quad \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\text{لدينا: } 0 < \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow 0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$$

$$\text{كذلك نجد: } 0 < \gamma < \frac{\pi}{4} ; 0 < \beta < \frac{\pi}{4}$$

$$\text{إذن: } 0 < \frac{\pi}{4} + k\pi < \frac{3\pi}{4} \text{ و } 0 < \alpha + \beta + \gamma < \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{و منه: } -1 < 4k < 2 \text{ إذن: } k = 0$$

$$\text{إذن: } \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$$

$$\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{-3 لتبين أن: } 2 \arctan \frac{1}{3} = \arctan \frac{3}{4}$$

$$\text{- نضع: } \alpha = \arctan \frac{1}{3} ; \beta = \arctan \frac{3}{4}$$

$$\tan \beta = \frac{3}{4} \text{ و } \tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \times \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{4}$$

$$\text{إذن: } \tan(2\alpha) = \tan \beta$$

$$\text{و منه: } (k \in \mathbb{Z}) \quad 2\alpha = \beta + k\pi$$

$$\text{لدينا: } 0 < \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow 0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{كذلك نجد: } 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{إذن: } -\frac{\pi}{4} < k\pi < \frac{\pi}{4} \text{ و } -\frac{\pi}{4} < 2\alpha - \beta < \frac{\pi}{4}$$

$$\text{و منه: } -1 < 4k < 1 \text{ إذن: } k = 0$$

$$\text{إذن: } 2\alpha = \beta$$

$$2 \arctan \frac{1}{3} = \arctan \frac{3}{4}$$

-4 لتبين أن:

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \arctan(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) - \frac{1}{2} \arctan \sqrt{x} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{نعتبر: } f(x) = \arctan(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) - \frac{1}{2} \arctan \sqrt{x}$$

$$f \text{ متصلة على } \mathbb{R}^+ \text{ قابلة للاشتقاق على } \mathbb{R}^{+*}$$

$$\text{و: } \forall x \in \mathbb{R}^{+*} ; f'(x) = 0$$

$$\text{إذن: } f \text{ ثابتة على } \mathbb{R}^{+*}$$

$$\text{و بما أن: } f \text{ متصلة على } \mathbb{R}^+$$

$$\text{فإن: } \forall x \in \mathbb{R}^+ ; f(x) = f(0) = \frac{\pi}{4}$$

$$\arctan(x^2 + x) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x^2 + x = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} ; x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \quad -3$$

تمرين 16
احسب

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \arctan \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\arctan t}{t} = 1 \quad -1$$

$$g(x) = \arctan \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} : \text{نعتبر : المشتق :}$$

$$g'(2) = \frac{1}{4} \quad g'(x) = \frac{2}{4+x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\arctan \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}}{x - 2} = \frac{1}{4}$$

تمرين 17

$$\begin{cases} f(x) = -1 + \arctan \sqrt[3]{x+1} & x > -1 \\ f(x) = x - \sqrt[3]{-x^2(x+1)} & x \leq -1 \end{cases}$$

1- (I) تحقق أن : $D_f = \mathbb{R}$
2- بين أن : f متصلة في -1

$$f(-1) = -1$$

3- احسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - \sqrt[3]{-x^2(x+1)} = -\infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-1 + \arctan \sqrt[3]{x+1})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1 + \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt[3]{-x^2(x+1)}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$$

-4

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \arctan(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) - \frac{1}{2} \arctan \sqrt{x} = \frac{\pi}{4} : \text{إذن}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} : \text{بين أن}$$

$$f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$$

f متصلة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} ; f'(x) = 0$$

إذن : f ثابتة على $\mathbb{R}^{+*}$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ ; f(x) = f(1) = \frac{\pi}{2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} : \text{إذن}$$

أ- نعوض x ب $-x$ في 5 ونسعمل : $\arctan$ فردية

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} : \text{نجد}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x}{x} \quad \text{ب-}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x} \right) = 1$$

تمرين 15

$$(E) : \arctan x + \arctan 3x = \frac{\pi}{3} \quad -1$$

$$x \leq 0 \Rightarrow \arctan x + \arctan 3x \leq 0$$

بما أن : $\arctan x + \arctan 3x > 0$ فإن : $x > 0$

$$(E) \Rightarrow \tan(\arctan x + \arctan 3x) = \tan \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{x + 3x}{1 - 3x^2} = 1 ; x > 0$$

$$\Rightarrow 4x = 1 - 3x^2 ; x > 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 4x - 1 = 0 ; x > 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 4x - 1 = 0 ; x > 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-2 - \sqrt{7}}{3} ; x = \frac{-2 + \sqrt{7}}{3} ; x > 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-2 + \sqrt{7}}{3}$$

$$S = \left\{ \frac{-2 + \sqrt{7}}{3} \right\}$$

$$\arctan 2x + \arctan 3x = \frac{\pi}{4} \quad -2$$

$$S = \left\{ \frac{1}{6} \right\} : \text{بنفس الطريقة نجد}$$

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x+1}^2(1+\sqrt[3]{x+1}^2)} & x > -1 \\ f'(x) = 1 + \frac{3x^2+2x}{3\sqrt[3]{-x^2(x+1)}^2} & x \leq -1 \end{cases}$$

↑ ↓

$$\forall x \leq -1 \quad 3x^2+2x > 0$$

f تزايدية على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	-1	$-1 + \frac{\pi}{2}$

-7 حل المعادلة : $f(x) = 0$

من خلال جدول تغيرات f

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -1 + \arctan \sqrt[3]{x+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x+1} = \tan 1$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = (\tan 1)^3 - 1$$

-8 إنشاء (C_f)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - 2x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x - \sqrt[3]{-x^2(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2 - x\sqrt[3]{-x^2(x+1)} + \sqrt[3]{-x^2(x+1)}^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2 \left(1 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}}^2 \right)} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - 2x = \frac{1}{3}$$

$$y = 2x + \frac{1}{3} \text{ مقارب لـ } (C_f) \text{ بجوار : } -\infty$$

-5 ادرس قابلية اشتقاق f في -1 ثم أول النتيجة هندسيا

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\arctan \sqrt[3]{x+1}}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\arctan \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}} \times \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x + 1} \\ &\text{نضع : } t = \sqrt[3]{x+1} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\arctan t}{t} \times \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = +\infty$$

f غير قابلة للإشتقاق يمين -1

و (C_f) يقبل نصف مماس عمودي يمين النقطة ذات الأفصول

-1 موجه نحو الأعلى.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x - \sqrt[3]{-x^2(x+1)} + 1}{x + 1} \\ &= 1 + \lim_{x \rightarrow -1^-} \sqrt[3]{x^2} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt[3]{-(x+1)}}{-(x+1)} \\ &= 1 + \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^2} \quad (t = \sqrt[3]{-(x+1)}) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = +\infty$$

f غير قابلة للإشتقاق يسار -1

و (C_f) يقبل نصف مماس عمودي يسار النقطة ذات الأفصول

-1 موجه نحو الأسفل .

-6 تغيرات f ثم إنشاء جدول تغيراتها

-3

$$g^{-1}(x) = x \Leftrightarrow g(x) = x \quad (x \leq -1)$$

$$\Leftrightarrow x - \sqrt[3]{-x^2(x+1)} = x \quad (x \leq -1)$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

(III) - نعتبر المتتالية : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $u_0 \in]-\infty; -1[$ $u_{n+1} = g^{-1}(u_n)$

1- لتبين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \in]-\infty; -1[$

بالترجع

لدينا : $u_0 \in]-\infty; -1[$

نفترض أن : $u_n \in]-\infty; -1[$

إذن : $g^{-1}(u_n) \in]-\infty; -1[$

بما أن : $g^{-1}(] -\infty; -1]) =] -\infty; -1]$ و $u_{n+1} = g^{-1}(u_n)$

فإن : $u_{n+1} \in]-\infty; -1[$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \in]-\infty; -1[$

2- لتبين أن (u_n) تزايدية

لدينا : $u_n \in]-\infty; -1[$

إذن : $g^{-1}(u_n) \geq u_n$

ومنه : $u_{n+1} \geq u_n$

إذن : (u_n) تزايدية

3- بما أن : (u_n) تزايدية مكبورة ب -1

فإن : (u_n) متقاربة

لدينا : $(n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = g^{-1}(u_n)$

و g^{-1} متصلة على $]-\infty; -1[$

و $g^{-1}(] -\infty; -1]) =] -\infty; -1]$

و $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \in]-\infty; -1[$

و (u_n) متقاربة

فإن : $\lim u_n$ هو حل المعادلة : $g^{-1}(x) = x$

لدينا : $g^{-1}(x) = x \Leftrightarrow x = -1$

إذن : $\lim u_n = -1$

(IV) - نعتبر المتتالية : $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $v_0 \in]-\infty; -1[$ $v_{n+1} = g(v_n)$

1- لتبين أن : $v_n \in]-\infty; -1[$

بالترجع

لدينا : $v_0 \in]-\infty; -1[$

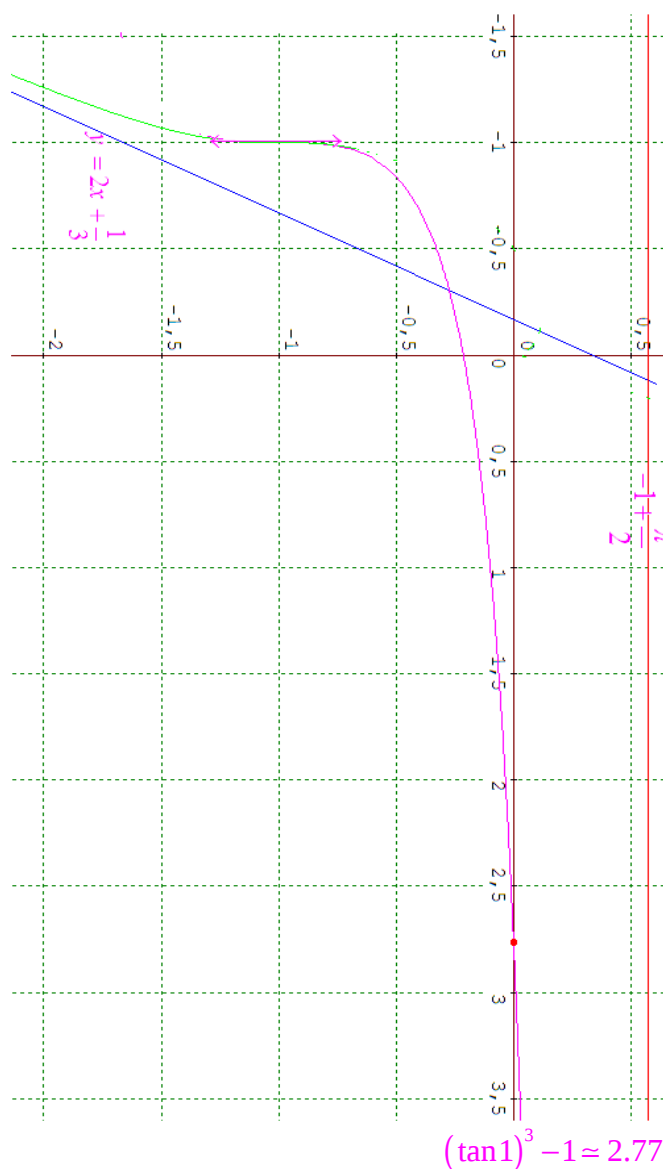
نفترض أن : $v_n \in]-\infty; -1[$

إذن : $g(v_n) \in]-\infty; -1[$

بما أن : $g(] -\infty; -1]) =]-\infty; -1]$ و $v_{n+1} = g(v_n)$

فإن : $v_{n+1} \in]-\infty; -1[$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n \in]-\infty; -1[$



$$(\tan 1)^3 - 1 \approx 2.77$$

(II) - نعتبر : g قصور f على $]-\infty; -1[$

$$g(x) = x - \sqrt[3]{-x^2(x+1)} \quad x \leq -1$$

f تزايدية قطعاً على $]-\infty; -1[$

إذن : g تزايدية قطعاً على $]-\infty; -1[$

$$g(] -\infty; -1]) =]-\infty; -1]$$

إذن : g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة من $J =]-\infty; -1[$

نحو $]-\infty; -1[$

2- بما أن : g تزايدية قطعاً

فإن : g^{-1} تزايدية قطعاً

$$\forall x \leq -1 \quad g(x) - x = -\sqrt[3]{-x^2(x+1)}$$

إذن : $\forall x \leq -1 \quad g(x) \leq x$

ومنه : $\forall x \leq -1 \quad g^{-1}(g(x)) \leq g^{-1}(x)$

إذن : $\forall x \leq -1 \quad g^{-1}(x) \geq x$

2- لنبين أن (v_n) تناقصية

لدينا : $v_n \in]-\infty; -1]$

إذن : $g(v_n) \leq v_n$

ومنه : $v_{n+1} \leq v_n$

إذن : (v_n) تناقصية

2- لنبين أن (v_n) غير مصغرة

نفترض أن : (v_n) مصغرة

إذن : (v_n) متقاربة

لدينا : $(n \in \mathbb{N}) \quad v_{n+1} = g(v_n)$

و g متصلة على $]-\infty; -1]$

و $g(]-\infty; -1]) =]-\infty; -1]$

و $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n \in]-\infty; -1]$

و (v_n) متقاربة

فإن : $\lim v_n$ هو حل المعادلة : $g(x) = x$

لدينا : $g(x) = x \Leftrightarrow x = -1$

إذن : $\lim v_n = -1$

بما أن : (v_n) تناقصية

فإن : $v_n \leq v_0 < -1$

إذن : $\lim v_n \leq v_0 < -1$

ومنه : $-1 \leq v_0 < -1$: تناقض

إذن : (v_n) غير مصغرة

3- بما أن : (v_n) تناقصية و غير مصغرة

فإن : $\lim v_n = -\infty$