

التمرين الأول

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}}$

- (1) يبي أنه f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و أحسب المشتقة $f'(x)$
- (2) أدرس منحنى تغيرات الدالة f
- (3) نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة كما يلي : $U_0 = 3$ و $U_{n+1} = f(U_n)$
 - أ- يبي أنه $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 \leq U_n \leq 3$
 - ب- أدرس رتبة المتتالية $(U_n)_n$ و استنتج أنها متقاربة
 - ج- حدد نهاية المتتالية $(U_n)_n$

التمرين الثاني

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[-1, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = \frac{\arctan \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}$; $x > -1$ و $f(-1) = 1$

- (1) أ- يبي أنه f متصلة على يمين النقطة $x_0 = -1$
- ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و أعط تأويلا هندسيا للنتيجة
- (2) ليكن X من المجال $]0, +\infty[$ و نضع : $\varphi(t) = t^3 (\arctan X - X) - X^3 (\arctan t - t)$
 - أ- يبي أنه φ قابلة للاشتقاق على المجال $]0, x[$ و أحسب المشتقة $\varphi'(t)$
 - ب- يبي أنه $(\exists c \in]0, x[) \quad \frac{\arctan X - X}{X^3} = \frac{-1}{3(1+c^2)}$
- (3) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين النقطة $x_0 = -1$
- (4) أ- يبي باستعمال مبرهنة التزايدان المنتهية أنه $(\forall X \in \mathbb{R}^+) \quad \frac{X}{1+X^2} \leq \arctan X \leq X$
 - ب- يبي أنه $(\forall x \in]1, +\infty[) \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{(x+1)^3}} \left(\frac{\sqrt{x+1}}{x+2} - \arctan \sqrt{x+1} \right)$
 - ج- استنتج أنه f تناقصية على $[-1, +\infty[$
- (5) أ- يبي أنه المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α و أنه $\alpha \in]0, 1[$
- ب- أرسم المنحنى (C_f) (نأخذ $\alpha \approx 0,7$)
- (6) نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R}^+ بما يلي : $g(x) = \frac{x}{1+x^2} - \arctan x$
 - أ- أحسب $g'(x)$ و أنجز جدل التغيرات للدالة g
 - ب- استنتج أنه $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad |g(x)| \leq \frac{\pi}{2}$
 - ج- يبي أنه $(\forall x \in]0, 1[) \quad |f'(x)| \leq \frac{\pi}{4}$
- (7) ليكن $(U_n)_n$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $U_0 = \frac{1}{2}$ و $U_{n+1} = f(U_n)$
 - أ- يبي أنه $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < U_n < 1$
 - ب- يبي أنه $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\pi}{4} |U_n - \alpha|$
 - ج- يبي أنه $(U_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها