

الاشتقاق

(I) - اشتقاق مركب دالتين:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I مفتوح و g دالة للاشتقاق على $f(I)$.

- لنبين أن $g \circ f$ قابلة للاشتقاق على I .

ليكن $x_0 \in I$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g \circ f(x) - g \circ f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \quad \text{لدينا:}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \quad \text{ولدينا } f \text{ قابلة للاشتقاق في } x_0 \text{ إذن}$$

$$X_0 = f(x_0), \quad X = f(x) \quad \text{نضع}$$

لدينا $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ (لأن f قابلة للاشتقاق في x_0 بالتالي متصلة في x_0).

إذن $x \rightarrow x_0$ يعني $f(x) \rightarrow f(x_0)$ يعني $X \rightarrow X_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{X \rightarrow X_0} \frac{g(X) - g(X_0)}{X - X_0} = g'(X_0) \quad \text{إذن:}$$

لأن g قابلة للاشتقاق في X_0 .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g \circ f(x) - g \circ f(x_0)}{x - x_0} = g'(X_0) \cdot f'(x_0) \quad \text{إذن:}$$

$$= g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

إذن $g \circ f$ قابلة للاشتقاق في x_0 و : $(g \circ f)'(x_0) = (g' \circ f)(x_0) \cdot f'(x_0)$

بالتالي $g \circ f$ قابلة للاشتقاق على I : $(\forall x \in I) (g \circ f)'(x) = (g' \circ f)(x) \cdot f'(x)$

خاصية:

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على مجال I و g قابلة للاشتقاق على $f(I)$
فإن $g \circ f$ قابلة للاشتقاق على I و $(\forall x \in I) (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

مثال:

نعتبر الدالة $f(x) = \cos(x^3 + x - 1)$

لدينا : $f(x) = \cos(x) \circ h(x)$ حيث $g(x) = x^3 + x - 1$ و $h(x) = \cos x$

ولدينا h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $h'(x) = -\sin x$

و $g(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ إذن $f = \cos \circ g$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) f'(x) = (\cos)'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$= h'(x^3 + x - 1) \cdot (3x^2 + 1)$$

$$= -\sin(x^3 + x - 1) \cdot (3x^2 + 1)$$

$$f'(x) = -(3x^2 + 1) \cdot \sin(x^3 + x - 1) \quad \text{إذن:}$$

ملاحظة:

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I
فإن الدوال : $x \rightarrow \cos(u(x))$ ، $x \rightarrow \sin(u(x))$ ، $x \rightarrow \tan(u(x))$

قابلة للاشتقاق على I و

$$(\forall \in I) (\cos(u(x)))' = -u'(x) \cdot \sin(u(x))$$

$$(\sin(u(x)))' = u'(x) \cdot \cos(u(x))$$

$$(\tan(u(x)))' = u'(x) [1 + \tan^2(u(x))]$$

II- اشتقاق الدالة العكسية و تطبيقاتها:

1- اشتقاق الدالة العكسية:

لتكن f دالة متصلة و رتيبة قطعاً على مجال I
 نعلم أن f تقابل من I نحو $J = f(I)$ و بالتالي تقبل دالة عكسية
 - نفترض أن f قابلة للاشتقاق على I .
 - لندرس اشتقاق f^{-1} على J .

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \quad \text{ليكن } y_0 \in J \text{ لنحسب}$$

$$\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f(x) = y \end{cases} \quad \text{يعني} \quad \begin{cases} f^{-1}(y_0) = x_0 \\ f^{-1}(y) = x \end{cases} \quad \text{نضع}$$

ولدينا : $\lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0$ لأن f^{-1} متصلة.

إذن $y \rightarrow y_0$ يعني $f^{-1}(y) \rightarrow x_0$ يعني $x \rightarrow x_0$

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \quad \text{إذن:}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \quad \text{ونعلم أن } f \text{ قابلة للاشتقاق في } x_0 \text{ إذن:}$$

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{إذا كانت } f'(x) \neq 0 \text{ فإن:}$$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \quad \text{إذن } f^{-1} \text{ قابلة للاشتقاق في } y_0 \text{ و:}$$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \quad \text{و } f(x_0) \text{ فإن } f^{-1} \text{ قابلة للاشتقاق في } x_0 \text{ و } f'(x) \neq 0 \text{ إذا كانت}$$

خاصية:

$$\begin{aligned} &(\forall x \in I) : f'(x) \neq 0 \text{ و } I \text{ مجال } f \text{ قابلة للاشتقاق و رتيبة قطعاً على مجال } I \\ &\text{فإن } f^{-1} \text{ قابلة للاشتقاق على } f(I) \text{ و } (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \end{aligned}$$

2- تطبيقات:

a) اشتقاق دالة الجذر من الرتبة n : ($n \geq 2$)

نعتبر الدالة: $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$x \rightarrow x^n$$

نعلم أن f تقابل و $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$

(*) لدينا : f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ و $f'(x) = nx^{n-1}$ و لدينا : $x = 0 \Leftrightarrow f'(x)$

(*) لدينا f قابلة للاشتقاق و رتيبة قطعاً على $]0, +\infty[$ و $f'(x) \neq 0$ ($\forall x \in]0, +\infty[$)

إذن f^{-1} قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$

$$(\forall x \in]0, +\infty[) (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(\sqrt[n]{x})} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} \quad \text{و:}$$

$$(\forall x \in]0, +\infty[) (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} \quad \text{إذن:}$$

$$\begin{aligned} ((x)^{\frac{1}{n}})' &= \frac{1}{n(x)^{\frac{1}{n}-1}} = \frac{1}{n(x)^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}} \\ (x^{\frac{1}{n}})' &= \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \end{aligned}$$

يعني :

خاصية

$$\begin{aligned} \text{الدالة } x \rightarrow \sqrt[n]{x} \text{ قابلة للاشتقاق على }]0, +\infty[\text{ و } (\forall x \in]0, +\infty[) (\sqrt[n]{x})' &= \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} \\ (x^{\frac{1}{n}})' &= \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \end{aligned}$$

يعني :

ملاحظة :

* إذا كانت U قابلة للاشتقاق على I و $U(x) > 0$ ($\forall x \in]0, +\infty[$)

فإن الدالة $x \rightarrow \sqrt[n]{U(x)}$ قابلة للاشتقاق على I و $(\forall x \in I) (\sqrt[n]{U(x)})' = \frac{U'(x)}{n(\sqrt[n]{U(x)})^{n-1}}$

$$\begin{aligned} \text{يعني : } \left[(U(x)^{\frac{1}{n}})' \right] &= \frac{U'(x)}{n} \cdot (U(x))^{\frac{1}{n}-1} \\ (\sqrt[3]{U(x)})' &= \frac{U'(x)}{3(\sqrt[3]{U(x)})^2} \text{ و } (\sqrt{U(x)})' = \frac{U'(x)}{2\sqrt{U(x)}} \end{aligned}$$

حالة خاصة :

(b) اشتقاق الدالة $x \rightarrow x^r$ مع $r \in \mathbb{Q}$:

باستعمال اشتقاق مركب دالتين نبين ما يلي :

خاصية :

$$\begin{aligned} \text{ليكن } r \in \mathbb{Q} \text{ . الدالة } x \rightarrow x^r \text{ قابلة للاشتقاق على }]0, +\infty[\\ \text{و } (\forall x \in]0, +\infty[) (x^r)' = r x^{r-1} \end{aligned}$$

ملاحظة :

إذا كانت U قابلة للاشتقاق على I و $U(x) > 0$ ($\forall x \in I$)

فإن الدالة $x \rightarrow (U(x))^r$ قابلة للاشتقاق على I و $(\forall x \in I) : (U(x)^r)' = r(U(x))'(U(x))^{r-1}$

(c) اشتقاق الدالة Arcsin ، Arc cos ، Arc tan :

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow [-1, 1]$$

$$x \rightarrow \sin x$$

$$f^{-1}(x) = \text{Arc sin } x \quad \text{نعلم أن}$$

$$f'(x) = \cos x \quad \text{و} \quad \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \text{ قابلة للاشتقاق على}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ أو } x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \text{ لدينا } f \text{ قابلة للاشتقاق و رتيبة قطعاً على}$$

$$\text{إذن } f^{-1} \text{ قابلة للاشتقاق على }]-1, 1[\text{ و } f\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) =]-1, 1[$$

$$(\forall x \in]-1, 1[) (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$= \frac{1}{\cos(\text{Arc sin } x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\forall x \in]-1,1[) \quad (\text{Arc sin } x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{إذن}$$

- بنفس الطريقة ندرس اشتقاق Arc cos و Arc tan .

خاصية:

1- الدالتان : $x \rightarrow \text{Arc sin } x$ و $x \rightarrow \text{Arc cos } x$ قابلتان للاشتقاق على $]-1,1[$

$$(\forall x \in]-1,1[) \quad (\text{Arc sin } x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{و} \quad (\text{Arc cos } x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$2- \text{الدالة } \text{Arc tan} \text{ قابلة للاشتقاق على } \mathbb{R} \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad (\text{Arc tan } x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

ملاحظة:

1- إذا كانت U دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و $-1 < U(x) < 1$ ($\forall x \in I$)

فإن الدالتين $x \rightarrow \text{Arc sin}(U(x))$ و $x \rightarrow \text{Arc cos}(U(x))$

$$\text{قابلتين للاشتقاق على } I \text{ و:} \quad (\forall x \in I) \quad [\text{Arc sin}(U(x))]' = \frac{U'(x)}{\sqrt{1-(U(x))^2}}$$

$$\text{و} \quad [\text{Arc cos}(U(x))]' = \frac{-U'(x)}{\sqrt{1-(U(x))^2}}$$

$$2- \text{إذا كانت } U \text{ دالة قابلة للاشتقاق على مجال } I \text{ و:} \quad (\forall x \in I) \quad [\text{Arc tan}(U(x))]' = \frac{U'(x)}{1+U(x)^2}$$

تمارين تطبيقية:

تمرين 1:

$$f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} - x \quad \text{نعتبر الدالة :}$$

* ادرس اشتقاق f و احسب $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{((x+1)^2)'}{3(\sqrt[3]{(x+1)^2})^2} - 1 \quad \text{و} \quad \mathbb{R} - \{-1\} \quad \text{لدينا } f \text{ قابلة للاشتقاق على}$$

$$= \frac{2(x+1)'(x+1)}{3(\sqrt[3]{(x+1)^2})^2} - 1$$

$$f'(x) = \frac{2(x+1)}{3(\sqrt[3]{(x+1)^2})^2} - 1 \quad \text{إذن}$$

طريقة أخرى:

$$f(x) = |x+1|^{\frac{2}{3}} - x \quad \text{لدينا :}$$

$$f(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}} - x \quad \text{* إذا كان } x > -1 \text{ فإن:}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x+1)'(x+1)^{\frac{2}{3}-1} - 1 \quad \text{إذن}$$

$$= \frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}} - 1$$

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} - 1 \quad \text{إذن}$$

$$f(x) = (-x-1)^{\frac{2}{3}} - x \quad \text{* إذا كان } x < -1 \text{ فإن :}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}(-x-1)'(-x-1)^{\frac{-1}{3}} - 1 \quad \text{إذن :}$$

$$f'(x) = \frac{-2}{3\sqrt[3]{-x-1}} - 1$$

لندرس الاشتقاق في -1 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2} - x - 1}{x + 1} \quad \text{لدينا} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{x + 1} - 1 \end{aligned}$$

x+1	1 0 - +
-----	---

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{\sqrt[3]{(x+1)^3}} - 1 \quad \text{لدينا:} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{(x+1)^3}} - 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} - 1 = -\infty \end{aligned}$$

إذن f غير قابلة للاشتقاق على يمين -1. و $\mathcal{E}_f$ يقبل نصف مما في موازي لمحور الأرتيبي موجه نحو الأعلى على يمين النقطة $A(-1,1)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{x + 1} - 1 \quad \text{- ولدينا :} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{-\sqrt[3]{-(x+1)^3}} - 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^-} -\sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{-(x+1)^3}} - 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-1}{\sqrt[3]{-(x+1)}} - 1 = -\infty \end{aligned}$$

إذن f غير قابلة للاشتقاق على يسار -1 و $\mathcal{E}_f$ يقبل نصف مماس موازي لمحور الأرتيبي موجه نحو الأعلى على يسار $A(-1,1)$.

تمرين 2 أدرس اشتقاق الدوال $\arcsin$ و $\arccos$ على يمين -1 و على يسار 1 .

تمرين 3

| احسب النهايات التالية:

$$l = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{Arc cos}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) - \frac{\pi}{3}}{x - 1} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{Arc cos}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) - \text{Arc cos}\left(\frac{1}{2}\right)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{Arc cos}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) - \text{Arc cos}\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}}{x - 1} \end{aligned}$$

- لدينا

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{Arc cos}(\frac{1}{1+x^2}) - \text{Arc cos}(\frac{1}{2})}{\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{Arc cos}(t) - \text{Arc cos}(\frac{1}{2})}{t - \frac{1}{2}} = (\text{Arc cost})'_{t=\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{-1}{\sqrt{1-t^2}} \right)_{t=\frac{1}{2}} = \frac{-2}{\sqrt{3}}$$

- ولدينا:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - (1+x^2)}{2(1+x^2)} \cdot \frac{1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{2(1+x^2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(1+x)}{2(1+x^2)} = \frac{-1}{2}$$

$$l = \frac{-2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{-1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{إذن:}$$

$$l = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{Arc sin}(\frac{1}{x^4+x+1}) - \frac{\pi}{2}}{x} \quad (2)$$

$$l = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\text{arcsin}(\frac{1}{x^4+x+1}) - \text{Arcsin}(1)}{\frac{1}{x^4+x+1} - 1} \cdot \frac{1}{x^4+x+1} - 1}{x}$$

$$l_1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\text{Arc sin}(\frac{1}{x^4+x+1}) - \text{Arc sin} 1}{\frac{1}{x^4+x+1} - 1}}{\quad} \quad \text{ولدينا:}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{\text{Arc sin}(t) - \text{Arc sin} 1}{t - 1} = \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{\text{Arc sin} t - \frac{\pi}{2}}{t - 1}$$

$$X = \text{Arc sin} t - \frac{\pi}{2} \quad \text{نضع:}$$

$$-\pi \leq X \leq 0 \quad \text{يعني} \quad -\pi \leq \text{Arc sin} t - \frac{\pi}{2} \leq 0 \quad \text{يعني} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \text{Arc sin} t \leq \frac{\pi}{2} \quad (*) \quad \text{لدينا}$$

$$t \rightarrow 1^- \Leftrightarrow X \rightarrow 0^- \quad (*)$$

$$t = \sin(X + \frac{\pi}{2}) \quad \text{يعني} \quad \text{Arc sin} t = X + \frac{\pi}{2} \quad \text{يعني} \quad X = \text{Arc sin} t - \frac{\pi}{2} \quad (*) \quad \text{لدينا}$$

$$t = \cos X \quad \text{يعني}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{\text{Arc sin} t - \frac{\pi}{2}}{t - 1} = \lim_{X \rightarrow 0^-} \frac{X}{\cos X - 1} \quad \text{إذن}$$

$$= \lim_{X \rightarrow 0^-} \frac{-X}{\frac{1 - \cos X}{X^2} \cdot X^2} = \lim_{X \rightarrow 0^-} \frac{-1}{\frac{1 - \cos X}{X^2} \cdot X} = +\infty$$

$$l_1 = +\infty \quad \text{إذن:}$$

$$l_2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x^4+x+1} - 1}{x} \quad \text{- ولدينا:}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - (x^4 + x + 1)}{(x^4 + x + 1) \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^4 - x}{x(x^4 + x + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^3 - 1}{x^4 + x + 1} = -1$$

إذن : $l_2 = -1$

ومنه : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arc sin}(x^2 - 1) + \frac{\pi}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \quad (3)$$

طريقة 1 :

$$t = \text{Arc sin}(x^2 - 1) + \frac{\pi}{2} \quad \text{نضع}$$

$$0 \leq \text{Arc sin}(x^2 - 1) + \frac{\pi}{2} \leq \pi \quad \text{يعني} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \text{Arc sin}(x^2 - 1) \leq \frac{\pi}{2} \quad (*) \text{ لدينا}$$

$$0 \leq t \leq \pi \quad \text{يعني}$$

$$x \rightarrow 0 \Leftrightarrow t \rightarrow 0^+ \quad (*) \text{ لدينا}$$

$$\sin(t - \frac{\pi}{2}) = x^2 - 1 \quad \text{يعني} \quad t - \frac{\pi}{2} = \text{Arc sin}(x^2 - 1) \quad (*) \text{ لدينا}$$

$$-\cos(t) = x^2 - 1 \quad \text{يعني} \quad -\sin(\frac{\pi}{2} - t) = x^2 - 1$$

$$x^2 = 1 - \cos(t) \quad \text{يعني}$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{1 - \cos t} \\ x = -\sqrt{1 - \cos t} \end{cases} \quad \text{يعني : أو}$$

$$x = \sqrt{1 - \cos t} \quad \text{فإن} \quad x \rightarrow 0^+ \quad -$$

$$x = -\sqrt{1 - \cos t} \quad \text{فإن} \quad x \rightarrow 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{\sqrt{1 - \cos t}} \quad \text{إذن :}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{\sqrt{\frac{1 - \cos t}{t^2}} \cdot t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{\frac{1 - \cos t}{t^2}}} = \sqrt{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{\sqrt{1 - \cos t}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{\sqrt{\frac{1 - \cos t}{t^2}} \cdot t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-1}{\sqrt{\frac{1 - \cos t}{t^2}}} = -\sqrt{2}$$

طريقة 2:

$$g(x) = \text{Arc sin}(x^2 - 1) + \frac{\pi}{2} \quad \text{نضع}$$

$$Dg = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

لنبسط : $g(x)$

$$x^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 2 \quad \text{لدينا}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{2} \quad \text{أو} \quad x = -\sqrt{2}$$

ولدينا :

$$x^2 - 1 = -1 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

إذن g قابلة للاشتقاق على $]0, \sqrt{2}[\cup]-\sqrt{2}, 0[$ و

$$g'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2-1)^2}} = \frac{2x}{\sqrt{-x^4+2x^2}}$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{2x^2(1-\frac{x^2}{2})}} = \frac{2x}{\sqrt{2}|x|\sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt{2}})^2}} = 2 \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}x}{|x|\sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt{2}})^2}}$$

+ إذا كان $x \in]0, \sqrt{2}[$ فإن :

$$g'(x) = 2 \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt{2}})^2}} = 2 \frac{(\frac{x}{\sqrt{2}})'}{\sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt{2}})^2}}$$

$$= (2.Arc \sin(\frac{x}{\sqrt{2}}))'$$

إذن :

$$g(x) = 2.Arc \sin(\frac{x}{\sqrt{2}}) + \lambda$$

و من أجل $x=1$ لدينا :

$$g(1) = 2.Arc \sin(\frac{1}{\sqrt{2}}) + \lambda$$

يعني :

$$\frac{\pi}{2} = 2 \cdot \frac{\pi}{4} + \lambda$$

يعني :

$$\lambda = 0$$

إذن :

$$g(x) = 2.Arc \sin(\frac{x}{\sqrt{2}})$$

* إذا كان $x \in]-\sqrt{2}, 0[$ فإن :

$$g'(x) = -2 \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt{2}})^2}} = (-2.Arc \sin \frac{x}{\sqrt{2}})'$$

إذن

$$g(x) = -2.Arc \sin(\frac{x}{\sqrt{2}}) + \lambda'$$

و من أجل $x=-1$

لدينا :

$$g(-1) = -2.Arc \sin(\frac{-1}{\sqrt{2}}) + \lambda'$$

يعني :

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \lambda'$$

$$\lambda' = 0$$

إذن :

$$g(x) = -2.Arc \sin(\frac{x}{\sqrt{2}})$$

وبالتالي :

$$g(x) = \begin{cases} 2.Arc \sin(\frac{x}{\sqrt{2}}); & x \in [0, \sqrt{2}[\\ -2.Arc \sin(\frac{x}{\sqrt{2}}); & x \in]-\sqrt{2}, 0[\end{cases}$$

إذن :

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \operatorname{Arcsin} \frac{x}{\sqrt{2}}}{x} \quad \text{لدينا :}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \operatorname{Arcsin} \frac{x}{\sqrt{2}}}{\frac{x}{\sqrt{2}}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{2} \cdot \frac{\operatorname{Arcsin} \frac{x}{\sqrt{2}}}{\frac{x}{\sqrt{2}}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{2} \cdot \frac{\operatorname{Arcsin} t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{2} \cdot \frac{\operatorname{Arcsin} t - \operatorname{Arcsin} 0}{t - 0}$$

$$= \sqrt{2} \cdot (\operatorname{Arcsin} t)'_{t=0} = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \right)_{t=0} = \sqrt{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2 \operatorname{Arcsin} \frac{x}{\sqrt{2}}}{x} \quad \text{- و لدينا :}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2 \operatorname{Arcsin} \frac{x}{\sqrt{2}}}{\frac{x}{\sqrt{2}}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} -\sqrt{2} \cdot \frac{\operatorname{Arcsin} \frac{x}{\sqrt{2}}}{\frac{x}{\sqrt{2}}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^-} -\sqrt{2} \cdot \frac{\operatorname{Arcsin} t}{t}$$

$$= -\sqrt{2} (\operatorname{Arcsin} t)'_{t=0} = -\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \right)_{t=0} = -\sqrt{2}$$

$$\boxed{l = \lim_{+\infty} x \left(\operatorname{Arc tan} \left(\frac{x+1}{x} \right) - \frac{\pi}{4} \right)} \quad (4)$$

$$l = \lim_{+\infty} x \left(\operatorname{Arc tan} \left(\frac{x+1}{x} \right) - \operatorname{Arc tan} 1 \right)$$

$$= \lim_{+\infty} x \left(\frac{\operatorname{Arc tan} \left(\frac{x+1}{x} \right) - \operatorname{Arc tan} 1}{\frac{1+x}{x} - 1} \right) \left(\frac{1+x}{x} - 1 \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{\operatorname{Arc tan}(t) - \operatorname{Arc tan} 1}{t - 1} \right) = (\operatorname{Arc tan} t)'_{t=1} = \lim_{+\infty} \left(\frac{\operatorname{Arc tan} \left(\frac{x+1}{x} \right) - \operatorname{Arc tan} 1}{\frac{1+x}{x} - 1} \right)$$

$$= \frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{l = \lim_{-\infty} x \left(\operatorname{Arc tan} \left(\frac{x^2+1}{x} \right) + \frac{\pi}{2} \right)} \quad (5)$$

$$\text{لدينا : } \frac{x^2+1}{x} < 0 \text{ بجوار } -\infty$$

$$\text{إذن } \text{Arc tan}\left(\frac{x^2+1}{x}\right) + \text{Arc tan}\left(\frac{1}{\frac{x^2+1}{x}}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{يعني } \text{Arc tan}\left(\frac{x^2+1}{x}\right) + \frac{\pi}{2} = -\text{Arc tan}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$$

$$l = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\text{Arc tan}\left(\frac{x^2+1}{x}\right) + \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{إذن :}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\text{Arc tan}\left(\frac{x}{x^2+1}\right) \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \left(\text{Arc tan}\left(\frac{x}{x^2+1}\right) - \text{Arc tan } 0 \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \left(\frac{\text{Arc tan}\left(\frac{x}{x^2+1}\right) - \text{Arc tan } 0}{\frac{x}{x^2+1}} \right) \cdot \frac{x}{x^2+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\underbrace{\frac{\text{Arc tan}\left(\frac{x}{x^2+1}\right) - \text{Arc tan } 0}{\frac{x}{x^2+1} - 0}}_{l_1} \right) \cdot \underbrace{\frac{-x^2}{x^2+1}}_{l_2}$$

$$l_1 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{Arc tan } t - \text{Arc tan } 0}{t - 0} \quad \text{و لدينا :}$$

$$= (\text{Arc tan } t)'_{t=0} = \frac{1}{1+t^2} = 1$$

$$l_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

$$l = -1 \quad \text{إذن :}$$

ملاحظة :

$$l = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\text{Arc sin } U(x) - \text{Arc sin } \alpha}{x - x_0} \quad (*) \text{ من اجل حساب}$$

$$\alpha \neq \pm 1 \quad \text{يعني : } \boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} U(x) \neq \pm 1} \quad \text{إذا كان}$$

$$l = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\text{Arc sin } U(x) - \text{Arc sin } \alpha}{U(x) - \alpha} \cdot \frac{U(x) - \alpha}{x - x_0} \quad \text{لدينا :}$$

$$U'(x) \text{ نقوم بحساب } \alpha \neq \pm 1 \quad \text{يعني : } \boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} U(x) \neq \pm 1} \quad \text{إذا كان}$$

$$l = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\text{Arc sin } U(x) - \text{Arc sin } \alpha}{U(x) - \alpha} \cdot \frac{U(x) - \alpha}{x - x_0} \quad : \boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} U'(x) \neq 0} \quad \text{إذا كان} +$$

$$t = \text{Arc sin } U(x) - \text{Arc sin } \alpha \quad \text{نستعمل تغيير المتغير بوضع} \quad : \boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} U'(x) = 0} \quad \text{إذا كان} +$$

إذا كان حساب x بدلالة t سهلاً.

. أو تبسيط الدالة $g(x) = \text{Arc sin } U(x) - \text{Arc sin } \alpha$

(*) بنفس الطريقة نحسب :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\text{Arc sin } U(x) - \text{Arc sin } \alpha}{x - x_0}$$

$$l = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\text{Arcs tan } U(x) - \alpha}{x - x_0} \quad (*) \text{ حساب :}$$

- إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} U(x) \neq \pm \infty$ يعني : $\alpha \neq \pm \frac{\pi}{2}$

$$l = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\text{Arcs tan } U(x) - \text{Arc tan } \beta}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\text{Arc tan } U(x) - \text{Arc tan } \beta}{U(x) - \beta} \cdot \frac{U(x) - \beta}{x - x_0}$$

- إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} U(x) = \pm \infty$ يعني : $\alpha \neq \pm \frac{\pi}{2}$ نستعمل الصيغة :

$$\text{Arc tan}\left(\frac{1}{U(x)}\right) + \text{Arc tan } U(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, \lim U(x) = -\infty \\ \frac{\pi}{2}, \lim U(x) = +\infty \end{cases}$$

ونصبح في الحالة السابقة.

تمرين :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x \text{Arc sin } x - \pi}{x - 1}$$

(*)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x \text{Arc sin } x - \pi}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x \text{Arc sin } x - \pi x + \pi x - \pi}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x \left(\frac{\text{Arc sin } x - \frac{\pi}{2}}{x - 1} \right) + \pi \frac{x - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x \cdot \frac{\text{Arc sin } x - \frac{\pi}{2}}{x - 1} + \pi = +\infty \end{aligned}$$

III- الدوال الأصلية :

1) تعريف :

لتكن f دالة معرفة على المجال I .
نقول إن الدالة F دالة أصلية لـ f على المجال I ، إذا وفقط كانت F قابلة للاشتقاق على I
و $F'(x) = f(x) \quad (\forall x \in I)$

مثال :

$$f(x) = x^3 + \frac{1}{x^2 + 1} + \sin x \quad \text{نعتبر الدالة :}$$

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \text{Arc tan } x - \cos x \quad \text{الدالة : دالة أصلية لـ } f \text{ على } \mathbb{R}.$$

وكل دالة على شكل : $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \text{Arc tan } x - \cos x + \lambda$ هي كذلك دالة أصلية لـ f على $\mathbb{R}$.

2) خاصيات :

1- لتكن f دالة تقبل دالة أصلية F على مجال I .

(*) نعتبر الدالة : $G = F + \lambda$ مع $\lambda \in \mathbb{R}$
لدينا :
 $G' = (F + \lambda)' = F'(x) = f(x)$

إذن G دالة أصلية لـ f .
 (*) لتكن G دالة أصلية لـ f .
 لدينا : $(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$
 إذن يوجد λ بحيث : $G(x) - F(x) = \lambda$
 يعني : $G(x) = F(x) + \lambda$

خاصية 1:

إذا كانت f دالة تقبل دالة أصلية F على مجال I فإن الدوال الأصلية لـ f هي الدوال التي تكتب على شكل $G = F + \lambda$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)

مثال:

حدد الدوال الأصلية للدوال : $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$
 لدينا : $f(x) = \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} = 1 - \frac{1}{x^2 + 1}$
 إذن الدوال الأصلية لـ f هي الدوال : $G(x) = x + \text{Arc tan } x + \lambda$
 -2 لتكن f دالة تقبل دالة أصلية F على I .
 ليكن $x_0 \in I$ و $y_0 \in \mathbb{R}$
 - لنبحث عن الدوال الأصلية G التي تحقق $G(x_0) = y_0$ لدينا : $G(x) = F(x) + \lambda$
 ولدينا : $G(x_0) = y_0$ يعني : $F(x_0) + \lambda = y_0$
 يعني : $\lambda = y_0 - F(x_0)$
 إذن $G(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)$
 ومنه توجد دالة أصلية وحيدة تحقق $G(x_0) = y_0$

خاصية 2:

إذا كانت f دالة تقبل دالة أصلية على مجال I و $x_0 \in I$ و $y_0 \in \mathbb{R}$ ، فإنه توجد دالة أصلية وحيدة G تحقق $G(x_0) = y_0$.

مثال:

نعتبر الدالة : $f(x) = x\sqrt[3]{x+1}$
 حد الدالة الأصلية F لـ f على $]-1, +\infty[$ بحيث $F(0) = 1$
 لدينا : $f(x) = x\sqrt[3]{x+1} = x(x+1)^{\frac{1}{3}}$

$$= (x+1-1)(x+1)^{\frac{1}{3}}$$

$$= (x+1)(x+1)^{\frac{1}{3}} - (x+1)^{\frac{1}{3}}$$

$$= (x+1)^{\frac{4}{3}} - (x+1)^{\frac{1}{3}}$$

$$= (x+1)'(x+1)^{\frac{4}{3}} - (x+1)'(x+1)^{\frac{1}{3}}$$
 إذن
$$F(x) = \frac{1}{\frac{4}{3}+1}(x+1)^{\frac{4}{3}+1} - \frac{1}{\frac{1}{3}+1}(x+1)^{\frac{1}{3}+1} + 1 + \lambda$$

$$= \frac{3}{7}(x+1)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{4}(x+1)^{\frac{4}{3}} + \lambda$$

$$= \frac{3}{7} \sqrt[3]{(x+1)^7} - \frac{3}{4} \sqrt[3]{(x+1)^4} + \lambda$$

ولدينا : $F(0) = 1$

$$\frac{3}{7} - \frac{3}{4} + \lambda = 1 \quad \text{يعني :}$$

$$\lambda = \frac{4}{7} + \frac{3}{4} = \frac{37}{28} \quad \text{يعني :}$$

$$F(x) = \frac{3}{7} \sqrt[3]{(x+1)^7} - \frac{3}{4} \sqrt[3]{(x+1)^4} + \frac{37}{28} \quad \text{وبالتالي :}$$

خاصية 3 :

لنكن F و G دالتان أصليتان ل f و g على التوالي على I .

* الدالة $F + G$ هي دالة أصلية ل $f + g$.

* الدالة αF دالة أصلية ل αf .

خاصية 4 : (مقبولة)

إذا كانت f دالة متصلة على مجال I فإن الدالة f تقبل دالة أصلية.

(3) جدول الدوال الأصلية الاعتيادية:

الدالة f	الدوال الأصلية F
$a \in \mathbb{R}$	$ax + \lambda$
$x^r \quad (r \in \mathbb{Q} - \{-1\})$	$\frac{1}{r+1} x^{r+1} + \lambda$
$f f^r \quad (r \in \mathbb{Q} - \{-1\})$	$\frac{1}{r+1} f^{r+1} + \lambda$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + \lambda$
$\frac{U'(x)}{\sqrt{U(x)}}$	$2\sqrt{U(x)} + \lambda$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + \lambda$
$\frac{f'}{f}$	$-\frac{1}{f} + \lambda$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\text{Arc tan}(x) + \lambda$
$\frac{U'(x)}{1+U^2(x)}$	$\text{Arc tan}(U(x)) + \lambda$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{Arc sin } x + \lambda$
$\frac{U'(x)}{\sqrt{1-U^2(x)}}$	$\text{Arc sin } U(x) + \lambda$
$\cos x$	$\sin x + \lambda$
$U'(x) \cos U(x)$	$\sin U(x) + \lambda$
$\sin x$	$-\cos x + \lambda$
$U'(x) \sin U(x)$	$-\cos U(x) + \lambda$

$1 + \tan^2 x$	$\tan x + \lambda$
$U'(x)(1 + \tan^2 U(x))$	$\tan U(x) + \lambda$
$f'g + fg'$	$fg + \lambda$
$\frac{f'g + fg'}{g^2}$	$\frac{f}{g} + \lambda$

مثال:

حدد الدوال الأصلية لـ : $f(x) = \cos x - x \sin x$
 $= (x)' \cos x + x(\cos x)'$

إذن الدوال الأصلية لـ f هي : $F(x) = x \cos x + \lambda$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)

IV- ميرهنة رول - ROLL - ميرهنة التزايدات المنتهية.

(1) ميرهنة رول:

إذا كانت f دالة تحقق ما يلي:

$$\left\{ \begin{array}{l} (*) \text{ } f \text{ متصلة على } [a, b] \\ (*) \text{ } f \text{ قابلة للاشتقاق على }]a, b[\\ (*) \text{ } f(a) = f(b) \end{array} \right.$$

فإنه يوجد $c \in]a, b[$

برهان:

(+) إذا كانت f ثابتة على $[a, b]$ فإن $f'(x) = 0$ ($\forall x \in]a, b[$)

إذن يوجد c من $]a, b[$ بحيث $f'(c) = 0$.

(+) إذا كانت f غير ثابتة.

فإنه يوجد x_0 من $]a, b[$ بحيث $f(x_0) \neq f(a)$ و $f(x_0) \neq f(b)$

- إذا كان : $f(x_0) > f(a)$

لدينا f متصلة على $[a, b]$ إذن f تقبل قيمة قصوى M عند c من $[a, b]$.

و لدينا : $f(c) = M > f(x_0) > f(a)$ إذن $f(c) \neq f(a)$ و $f(c) \neq f(b)$

إذن $c \neq a$ و $c \neq b$

ومنه $c \in]a, b[$

لدينا f قابلة للاشتقاق في c و تقبل قيمة قصوى عند c إذن $f'(c) = 0$.

ومنه يوجد $c \in]a, b[$ بحيث $f'(c) = 0$.

- إذا كان $f(x_0) < f(a)$ نفس الطريقة باستعمال القيمة الدنوية.

ملاحظة:

(*) العدد c ليس وحيدا.

(*) ميرهنة رول يعني هندسيا أنه توجد نقطة أفصولها c حيث يكون المماس موازيا لمحور الأفاصيل.

(2) ميرهنة التزايدات المنتهية:

ميرهنة:

إذا كانت f دالة تحقق ما يلي:

$$\left\{ \begin{array}{l} (*) \text{ } f \text{ متصلة على } [a, b] \\ (*) \text{ } f \text{ قابلة للاشتقاق على }]a, b[\end{array} \right.$$

فإنه يوجد $c \in]a, b[$ بحيث $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$

يعني : $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$

برهان :

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) \quad \text{نعتبر الدالة :}$$

(* لدينا φ متصلة على $[a, b]$

$$(\forall x \in]a, b[) \quad \varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \quad \text{و} \quad]a, b[\quad \varphi \text{ قابلة للاشتقاق على}$$

$$\varphi(b) = \varphi(a) = f(a) \quad \text{لدينا (*)}$$

إذن حسب رول يوجد $c \in]a, b[$ بحيث : $\varphi'(c) = 0$

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0 \quad \text{يعني :}$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \quad \text{يعني :}$$

ملاحظة :

(* العدد c ليس وحيدا.

(* نعتبر النقطتين $A(a, f(a))$ ، $B(b, f(b))$

لدينا $\frac{f(b) - f(a)}{b-a}$ هو المعامل الموجه للمستقيم (AB) .

و لدينا $f'(c)$ هو المعامل الموجه للمماس في $M(c, f(c))$

إذن مبرهنة التزايدات المنتهية تعني هندسيا أنه توجد نقطة أفصولها c حيث يكون المماس موازيا (AB) .
- مبرهنة رول هي حالة خاصة لمبرهنة التزايدات المنتهية.

تمارين

بين ما يلي:

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) \quad |\sin x - \sin y| \leq |x - y| \quad (*)$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad \frac{x}{x^2 + 1} \leq \text{Arc tan } x \leq x \quad (*)$$

$$(\forall x \in [0, 1]) \quad x \leq \arcsin x \leq \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (*)$$

(* ليكن X و y من $\mathbb{R}$. لنبين أن $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$

نعتبر الدالة $f(t) = \sin t$

- لدينا f متصلة على المجال الذي محاذاته X و y .

- قابلة للاشتقاق على هذا المجال مفتوح.

وحسب مبرهنة المتزايدات المنتهية يوجد c محصور بين X و y بحيث : $f(x) - f(y) = (x - y)f'(c)$

$$\sin x - \sin y = (x - y) \cos c \quad \text{يعني :}$$

$$|\sin x - \sin y| = (x - y)|\cos c| \quad \text{يعني :}$$

$$|x - y||\cos c| \leq |x - y| \quad \text{لدينا :} \quad |\cos c| \leq 1 \quad \text{إذن :}$$

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y| \quad \text{يعني :}$$

$$\frac{1}{1+x^2} \leq \text{Arc tan } x \leq x \quad \text{ليكن } x \in \mathbb{R}^+ \quad \text{لنبين أن}$$

نعتبر الدالة $f(t) = \text{Arc tan } t$

- لدينا f متصلة على $[0, x]$.

- f قابلة للاشتقاق على $]0, x[$ و $f'(t) = \frac{1}{1+t^2}$

إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية يوجد $c \in]0, x[$ بحيث $f(x) - f(0) = (x - 0)f'(c)$

$$\text{يعني : } \text{Arc tan } x = x \cdot \frac{1}{1+c^2}$$

$$\text{و لدينا : } 0 < c < x$$

$$\text{يعني : } 0 < c^2 < x^2$$

$$\text{يعني : } 1 < 1+c^2 < 1+x^2$$

$$\text{يعني : } \frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+c^2} < 1$$

$$\text{إذن : } \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{x}{1+c^2} \leq x$$

$$\text{يعني : } \frac{x}{1+x^2} \leq \text{Arctan } x \leq x$$

$$\text{إذن : } (\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad \frac{x}{1+x^2} \leq \text{Arctan } x \leq x$$

(3) تطبيقات :

خاصية 1:

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و $f'(x) = 0$ ($\forall x \in I$) فإن f ثابتة على I .

برهان :

ليكن x_1 و x من I بحيث $x_2 \neq x_1$

نفترض مثلاً $x_1 < x_2$

- لدينا f متصلة على $[x_1, x_2]$ (لأن $[x_1, x_2] \subset I$)

- لدينا f قابلة للاشتقاق على $]x_1, x_2[$ ($]x_1, x_2[\subset I$)

إذن حسب TAF يوجد $c \in]x_1, x_2[$ بحيث $f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2) f'(c)$

و لدينا $f'(c) = 0$ إذن $f(x_1) - f(x_2) = 0$

يعني $f(x_1) = f(x_2)$

ومنه f ثابتة على I .

ملاحظة :

(1) هذه الخاصية غير صحيحة إذا كان I ليس مجالاً.

(2) إذا كانت f, g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال بحيث $f'(x) = g'(x)$ ($\forall x \in I$).

فإنه يوجد $\lambda \in \mathbb{R}$ بحيث : $f(x) = g(x) + \lambda$ ($\forall x \in I$)

تمرين تطبيقي:

$$\text{بين أن : } \frac{\pi}{2} - 2 \text{Arc tan } \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \text{Arc sin } x \quad (\forall x \in]-1, 1[)$$

$$\text{نضع - } f(x) = \text{Arc sin } x - \frac{\pi}{2} + 2 \text{Arc tan } \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$\text{لنبين أن } f(x) = 0$$

لدينا : f قابلة للاشتقاق على $] -1, 1[$.

$$\text{و } f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 2 \frac{(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}})' }{1 + \frac{1-x}{1+x}}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1-x}{1+x}\right)' \left(\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 2 \frac{\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}}{\frac{2}{1+x}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-2}{(1+x)^2 \left(2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)} (1+x) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{(1+x)\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{(1+x)^2 \frac{(1-x)}{1+x}}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \\
 & \quad (\forall x \in]-1, 1[) \quad f'(x) = 0 \quad \text{إذن :}
 \end{aligned}$$

يعني f ثابتة.

$$f(0) = 0 - \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \frac{\pi}{4} = 0 \quad \text{ولدينا :}$$

$$(\forall x \in]-1, 1[) \quad f(x) = 0 \quad \text{إذن}$$

$$(\forall x \in]-1, 1[) \quad \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{Arc tan} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \operatorname{Arc sin} x \quad \text{يعني :}$$

خاصية 2:

إذا كانت f, g دالتان تحققان مايلي:

$$\left\{ \begin{array}{l} * \quad g, f \text{ متصلتان على }]a, +\infty[\\ * \quad g, f \text{ قابلتان للاشتقاق على }]a, +\infty[\text{ و} \\ (\forall x \in]a, +\infty[) \quad f'(x) \geq g'(x) \\ * \quad f(a) = g(a) \end{array} \right. \quad \text{فإن : } f(x) \geq g(x) \quad (\forall x \in]a, +\infty[)$$