هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma



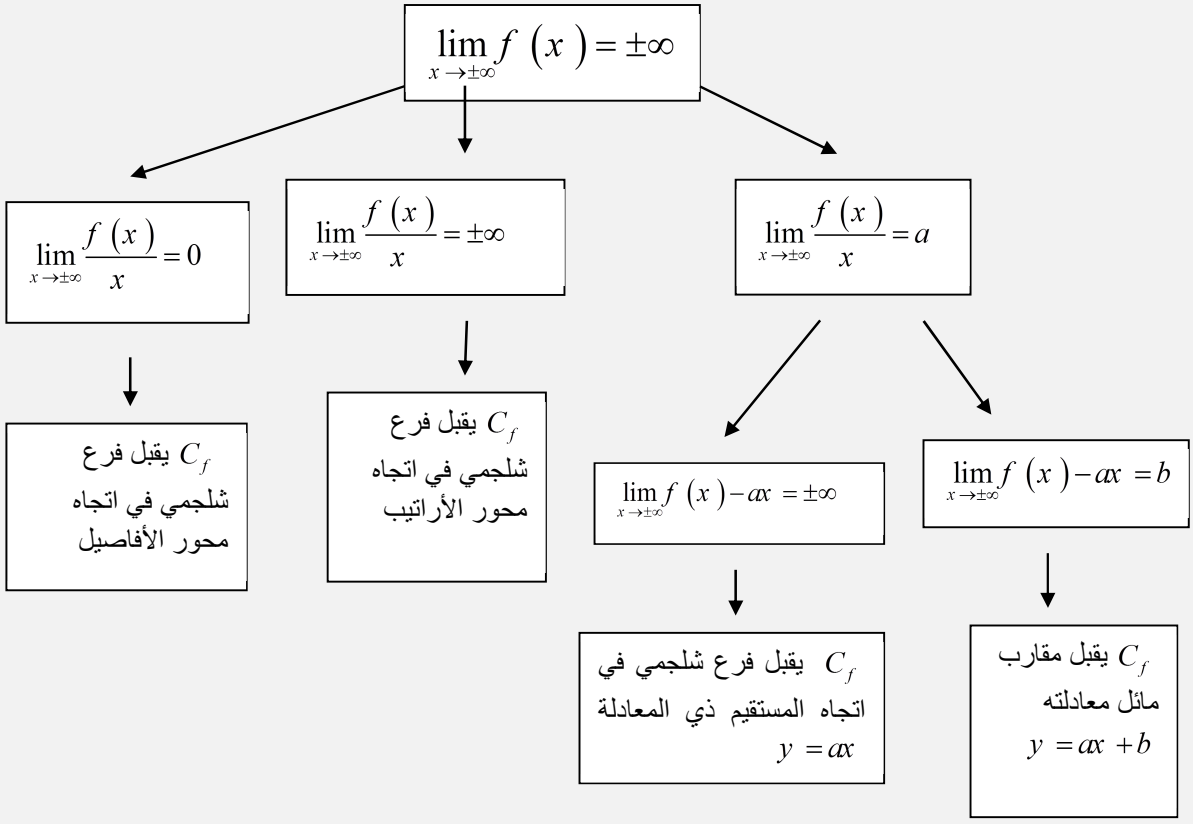
# أَهَمُّ مَا نَحْتَاجُهُ فِي دِرَاسَةِ الدّوَالِ

## أ. النهايات و الفروع اللانهائية

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty \Leftrightarrow C_f$ يقبل مقارب عمودي معادلته $x=a$

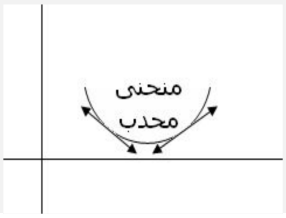
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b \Leftrightarrow C_f$ يقبل مقارب أفقي معادلته $y=b$ بجوار $+\infty$ أو بجوار $-\infty$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0 \Leftrightarrow C_f$ يقبل مقارب مائل معادلته $y=ax+b$ بجوار $+\infty$ أو بجوار $-\infty$




## ب. تقعر منحنى و نقط الانعطاف

- إذا كان $\forall x\in I \quad f''(x)\geq 0$ فإن $(C_f)$ محدب



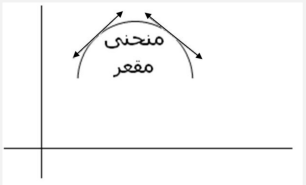



للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

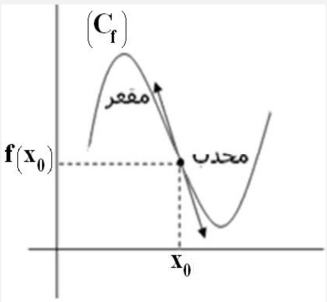
هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma



- إذا كان $\forall x\in I \quad f''(x)\le 0$ فإن $(C_f)$ مقعر




- إذا كانت $f''$ تنعدم و تغير إشارتها عند $a$ فإن النقطة $I(a,f(a))$ هي نقطة انعطاف
- إذا كانت $f'$ تنعدم و لا تغير إشارتها عند $a$ فإن النقطة $I(a,f(a))$ هي نقطة انعطاف




### ج. مركز و محور تماثل $(C_f)$

- المستقيم ذي المعادلة $x=a$ محور تماثل ل $(C_f)$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}\forall x\in D_f: & 2a-x\in D_f\\ \forall x\in D_f: & f(2a-x)=f(x)\end{cases}$
- النقطة $\Omega(a,b)$ مركز تماثل ل $(C_f)$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}\forall x\in D_f: & 2a-x\in D_f\\ \forall x\in D_f: & f(2a-x)=2b-f(x)\end{cases}$

### د. اتصال دالة عددية

- $f$ متصلة في $a$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$
- $f$ متصلة في $a$ على اليمين $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=f(a)$
- $f$ متصلة في $a$ على اليسار $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=f(a)$
- $f$ متصلة في $a$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=f(a)$

### ه. مبرهنة القيم الوسيطية

- مبرهنة القيم الوسيطية (وجودية الحل على $[a,b]$)

إذا كانت $f$ متصلة على $[a,b]$ و $f(a)\times f(b)<0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $]a,b[$

- مبرهنة القيم الوسيطية بالوحدانية (وجودية ووحدانية الحل على $[a,b]$)

إذا كانت $f$ متصلة و رتيبة قطعا على $[a,b]$ و $f(a)\times f(b)<0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال



للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma



$]a,b[$

- مبرهنة ( وجودية ووحدانية الحل على مجال $I$ )

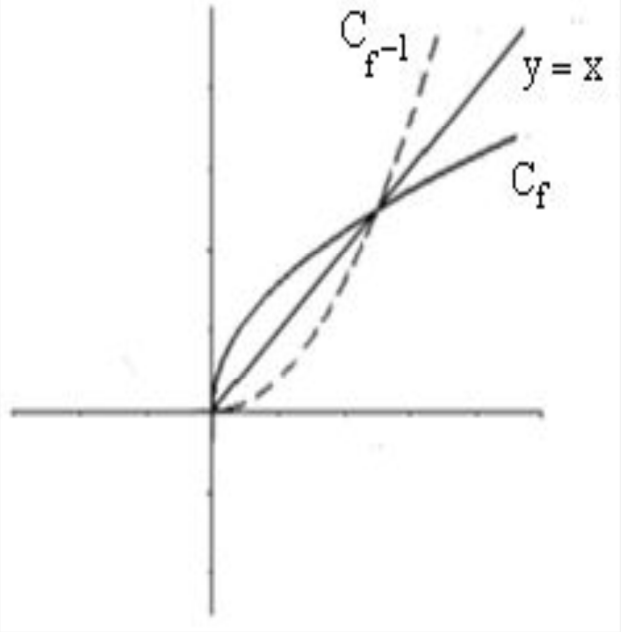
إذا كانت $f$ متصلة و رتيبة قطعا على $I$ و $0\in f(I)$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $I$

### و. اتصال مركب دالتين

خاصية :

إذا كانت $f$ دالة متصلة على مجال $I$ و $g$ متصلة على مجال $J$ بحيث $f(I)\subset J$ فإن $g\circ f$ متصلة على $I$.

### ز. الدالة العكسية




خاصية : إذا كانت $f$ دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال $I$ فإن المعادلة $f(x)=y$ حيث $y\in f(I)$ تقبل حلا وحيدا في المجال $I$

الدالة التي تربط كل عدد $y$ بالحل تسمى الدالة العكسية للدالة $f$ و نرمز لها ب : $f^{-1}$

نتائج:

(1) $\begin{cases} y=f^{-1}(x) \\ x\in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y)=x \\ y\in I \end{cases}$

(2) $\begin{cases} f^{-1}\circ f(x)=x & ;x\in I \\ f\circ f^{-1}(x)=x & ;x\in J \end{cases}$

خاصيات: لتكن $f$ دالة و $f^{-1}$ دالتها العكسية على المجال $J$ لدينا :

- $f^{-1}$ متصلة على المجال $J$
- $f$ و $f^{-1}$ لهما نفس الرتابة
- منحنى $f^{-1}$ هو مماثل لمنحنى $f$ بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة $y=x$ ( المنصف الأول للمعلم )

### ح. الإشتقاق

| | | |
|---|---|---|
| $f$ قابلة للاشتقاق في $a$ | $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=l\in\mathbb{R}$<br>$l=f'(a)$ | $(C_f)$ يقبل مماسا في النقطة $A(a,f(a))$ معامله الموجه $l=f'(a)$ و معادلته :<br>$y=f'(a).(x-a)+f(a)$ |
| $f$ قابلة للاشتقاق في $a$ على اليمين | $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=l\in\mathbb{R}$<br>$l=f_d'(a)$ | $(C_f)$ يقبل مماسا في النقطة $A(a,f(a))$ معامله الموجه $l=f_d'(a)$ و معادلته :<br>$y=f_d'(a).(x-a)+f(a)$ |



للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma



| | | | |
|---|---|---|---|
| $f$ قابلة للاشتقاق في $a$ على اليسار | $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l\in\mathbb{R}$<br>$l=f_g'(a)$ | $\leftrightarrow$ | $(C_f)$ يقبل مماسا في النقطة $A(a,f(a))$ معامله الموجه $l=f_g'(a)$ و معادلته :<br>$y=f_g'(a).(x-a)+f(a)$ |
| $f$ قابلة للاشتقاق في $a$ | ✓ $f$ قابلة للاشتقاق في $a$ على اليمين<br>✓ $f$ قابلة للاشتقاق في $a$ على اليسار<br>✓ $f_d'(a)=f_g'(a)=f'(a)$ | $\leftrightarrow$ | $(C_f)$ يقبل مماسا في النقطة $A(a,f(a))$ معامله الموجه $l=f'(a)$ و معادلته :<br>$y=f'(a).(x-a)+f(a)$ |

- إذاكانت $f$ قابلة للاشتقاق في $a$ على اليمين و $f$ قابلة للاشتقاق في $a$ على اليسار و $f_d'(a)\neq f_g'(a)$ فإن $f$ غير قابلة للاشتقاق في $a$ . في هذه الحالة $(C_f)$ يقبل نصفي مماس مختلفان في النقطة $A(a,f(a))$ معاملاهما الموجهان $f_d'(a)$ و $f_g'(a)$ و النقطة $A(a,f(a))$ تسمى نقطة مزواة
- إذا كانت $f'(a)=0$ فإن $(C_f)$ يقبل مماس أفقي في $A(a,f(a))$

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty \Rightarrow$ $f$ غير قابلة للاشتقاق في $a$ على اليمين

$(C_f)$ يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى في النقطة $A(a,f(a))$

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty \Rightarrow$ $f$ غير قابلة للاشتقاق في $a$ على اليسار

$(C_f)$ يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل في النقطة $A(a,f(a))$

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty \Rightarrow$ $f$ غير قابلة للاشتقاق في $a$ على اليمين

$(C_f)$ يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل في النقطة $A(a,f(a))$

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty \Rightarrow$ $f$ غير قابلة للاشتقاق في $a$ على اليسار

$(C_f)$ يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى في النقطة $A(a,f(a))$

| الدالة $f$ | الدالة المشتقة $f'$ | المجال $I$ |
|---|---|---|
| $x\mapsto k$ | $x\mapsto 0$ | $\mathbb{R}$ |
| $x\mapsto x^n \quad n\in\mathbb{N}^*$ | $x\mapsto nx^{n-1}$ | $\mathbb{R}$ |



للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma



| | | |
|---|---|---|
| $x \mapsto x^n \quad n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{-1\}$ | $x \mapsto nx^{n-1}$ | $I = ]-\infty,0[$ أو $I = ]0,+\infty[$ |
| $x \mapsto x^r \quad r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\}$ | $x \mapsto rx^{r-1}$ | $I = ]0,+\infty[$ |
| $x \mapsto \sqrt{x}$ | $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $I = ]0,+\infty[$ |
| $x \mapsto \frac{1}{x}$ | $x \mapsto \frac{-1}{x^2}$ | $I = ]-\infty,0[$ أو $I = ]0,+\infty[$ |
| $x \mapsto \sin x$ | $x \mapsto \cos x$ | $\mathbb{R}$ |
| $x \mapsto \cos x$ | $x \mapsto -\sin x$ | $\mathbb{R}$ |
| $x \mapsto \tan x$ | $x \mapsto 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ | $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$ |

| الدالة | الدالة المشتقة |
|---|---|
| $\alpha.f$ | $\alpha.f'$ |
| $f+g$ | $f'+g'$ |
| $f \times g$ | $f' \times g + f \times g'$ |
| $\frac{1}{g}$ | $-\frac{g'}{g^2}$ |
| $\frac{f}{g}$ | $\frac{f'g - fg'}{g^2}$ |
| $g \circ f$ | $f' \times g' \circ f$ |
| $\sqrt{f}$ | $\frac{f'}{2\sqrt{f}}$ |
| $f^n$ | $nf'f^{n-1}$ |

- ليكن $n \in \mathbb{N}^*$

$$(\forall x > 0) \quad \left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

- إذا كانت $f$ دالة موجبة قطعا و قابلة للاشتقاق على مجال $I$ فإن $\sqrt[n]{f}$ قابلة للاشتقاق على $I$ و لدينا :

$$(\forall x \in I) \quad \left(\sqrt[n]{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{n\sqrt[n]{(f(x))^{n-1}}}$$

- لتكن $f$ دالة معرفة على مجال $I$ تقبل دالة عكسية $f^{-1}$ و ليكن $x_0$ و $y_0$ عددان بحيث : $f^{-1}(x_0) = y_0$

إذا كانت $f'(y_0) \neq 0$ فإن $f^{-1}$ قابلة للاشتقاق في $x_0$ و لدينا $(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)}$

- إذا كانت $f'$ لا تنعدم على $I$ فإن $f^{-1}$ قابلة للاشتقاق على $f(I)$ و لدينا :

$$(\forall x \in f(I)) \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)}$$



للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma



رتابة دالة

- إذا كانت $\forall x \in I \quad f'(x) \geq 0$ فإن $f$ تزايدية على $I$
- إذا كانت $\forall x \in I \quad f'(x) \leq 0$ فإن $f$ تناقصية على $I$
- إذا كانت $\forall x \in I \quad f'(x) > 0$ فإن $f$ تزايدية قطعا على $I$
- إذا كانت $\forall x \in I \quad f'(x) < 0$ فإن $f$ تناقصية قطعا على $I$

خاصية

- إذا كانت $\forall x \in I \quad f'(x) \geq 0$ و كانت $f'$ تنعدم في عدد منته من النقط على $I$ فإن $f$ تزايدية قطعا على $I$
- إذا كانت $\forall x \in I \quad f'(x) \leq 0$ و كانت $f'$ تنعدم في عدد منته من النقط على $I$ فإن $f$ تناقصية قطعا على $I$

## ط. دالة اللوغاريتم النبيري

**1. تعريف :**

دالة اللوغاريتم النبيري هي الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على المجال $]0,+\infty[$ و التي تنعدم في 1 و يرمز لها بالرمز : $\ln$

**2. استنتاجات و خاصيات :**

- $D_{\ln} = ]0,+\infty[ \quad \left(\ln\left(\boxed{>0}\right)\right)$
- $\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad (\forall x \in ]0,+\infty[)$ إذن الدالة $\ln$ تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$
- $\forall x > 0; \forall y > 0 \quad \ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$
- $\forall x > 0; \forall y > 0 \quad \ln x > \ln y \Leftrightarrow x > y$
- $\forall x > 0; \forall y > 0 \quad \ln x \leq \ln y \Leftrightarrow x \leq y$
- $\ln(1) = 0$
- يوجد عدد حقيقي وحيد من $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ نرمز له ب : $e$ بحيث $e \simeq 2,718$ و يحقق : $\ln(e) = 1$
- $\forall x > 0 \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \ln x = a \Leftrightarrow x = e^a$
- إشارة $\ln x$ :
  - إذا كان : $0 < x < 1$ فإن $\ln x < 0$
  - إذا كان : $x \geq 1$ فإن $\ln x \geq 0$

**3. العمليات على الدالة $\ln$**

ليكن $x$ و $y$ من $]0,+\infty[$ و $r \in \mathbb{Q}$ لدينا :

- $\ln(x.y) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0^+$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x \ln x = 0^-$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x^n \ln x = 0^-$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

خاصية :

إذا كانت $U$ دالة قابلة للاشتقاق على مجال $I$ بحيث : $\forall x \in I \quad U(x) \neq 0$

فإن الدالة $x \mapsto \ln|U(x)|$ قابلة للاشتقاق على $I$ و لدينا : $\forall x \in I \quad \left(\ln|U(x)|\right)' = \frac{U'(x)}{U(x)}$

ملاحظة : إذا كانت $U$ موجبة قطعا :

$$\left(\ln(U(x))\right)' = \frac{U'(x)}{U(x)}$$

نتيجة : مجموعة الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{U'(x)}{U(x)}$



للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma



- $\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln(x)-\ln(y)$
- $\ln\left(x^{r}\right)=r\ln(x)$

هي الدوال : $x\mapsto \ln|U(x)|+\lambda \quad (\lambda\in\mathbb{R})$

## ي. الدالة الأسية

أ. تعريف:

الدالة العكسية للدالة $\ln$ تسمى الدالة الأسية النبيرية و نرمز لها ب : $\exp$

ملاحظة: $\forall x\in\mathbb{R} \quad \exp(x)=e^{x}$

نتائج :

$$\begin{cases} e^{x}=y \\ (x\in\mathbb{R}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\ln(y) \\ (y>0) \end{cases}$$

$$\exp:\mathbb{R}\mapsto ]0,+\infty[$$
$$x\mapsto \exp(x)$$

$\forall x\in\mathbb{R}: \quad e^{x}>0 \quad$ و $\quad D_{\exp}=\mathbb{R}$

ليكن $x$ و $y$ من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$e^{x}=e^{y}\Leftrightarrow x=y$$
$$e^{x}<e^{y}\Leftrightarrow x<y$$
$$e^{x}\geq e^{y}\Leftrightarrow x\geq y$$
$$\forall x\in\mathbb{R}:\ln\left(e^{x}\right)=x$$
$$\forall x>0: e^{\ln x}=x$$

❖ $e^{0}=1 \quad$ و $\quad e^{1}=e$

ج. العمليات :

ليكن $x$ و $y$ من $\mathbb{R}$ لدينا :

1) $e^{x}\times e^{y}=e^{x+y}$
2) $\frac{e^{x}}{e^{y}}=e^{x-y}$
3) $\frac{1}{e^{x}}=e^{-x}$
4) $\left(e^{x}\right)^{r}=e^{rx} \quad (r\in\mathbb{Q})$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}=+\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^{n}}=+\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} e^{x}=0^{+}$$
$$\lim_{x\to-\infty} xe^{x}=0^{-}$$
$$\lim_{x\to-\infty} x^{n}e^{x}=\begin{cases}0^{+} & n\ \text{زوجي}\\ 0^{-} & n\ \text{فردي}\end{cases}$$
$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$$

1) الدالة $\exp$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا :
$(\forall x\in\mathbb{R}) \quad \left(e^{x}\right)'=e^{x}$

2) إذا كانت $U$ دالة قابلة للاشتقاق على مجال $I$ فإن الدالة $x\mapsto e^{U(x)}$ قابلة للاشتقاق على $I$ و لدينا :

$(\forall x\in I) \quad \left(e^{U(x)}\right)'=U'(x)e^{U(x)}$

3) $(\forall x\in I) \quad \left(e^{rx}\right)'=re^{rx}$

4)

| الدالة | الأصلية |
|---|---|
| $e^{x}$ | $e^{x}$ |
| $e^{rx}$ | $\frac{1}{r}e^{rx}$ |
| $U'(x)e^{U(x)}$ | $e^{U(x)}$ |



للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma



**ك. الدوال الأصلية**

| $f$ دالة معرفة على المجال $I$ بما يلي : $f(x)=.....$ | الدوال الأصلية ل $f$ على $I$ معرفة بما يلي: $F(x)=.....$ | المجال $I$ |
|---|---|---|
| $k$ ($k$ عدد حقيقي ثابت) | $kx+c$ | $\mathbb{R}$ |
| $x^n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$ | $\mathbb{R}$ |
| $x^n$ $(n\neq -1;n\in\mathbb{Z}^*)$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$ | $]-\infty,0[$ أو $]0,+\infty[$ |
| $x^r$ $(r\in\mathbb{Q}-\{-1\})$ | $\frac{x^{r+1}}{r+1}+c$ | $]0,+\infty[$ |
| $\cos(x)$ | $\sin(x)$ | $\mathbb{R}$ |
| $\sin(x)$ | $-\cos(x)$ | $\mathbb{R}$ |
| $1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$ | $\tan(x)$ | $\left]\frac{-\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[,(k\in\mathbb{Z})$ |
| $(a\neq 0),\cos(ax+b)$ | $\frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$ | $\mathbb{R}$ |
| $(a\neq 0),\sin(ax+b)$ | $\frac{-1}{a}\cos(ax+b)+c$ | $\mathbb{R}$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x}}$ | $2\sqrt{x}+c$ | $]0,+\infty[$ |
| $\frac{1}{x^2}$ | $\frac{-1}{x}+c$ | $]-\infty,0[$ أو $]0,+\infty[$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\ln(x)+c$ | $]0,+\infty[$ |
| $e^x$ | $e^x+c$ | $\mathbb{R}$ |

| الدالة $f$ | الدوال الأصلية ل $f$ على $I$ | شروط على $u$ |
|---|---|---|
| $u'u^n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ | $\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$ | |
| $u'u^n$ $(n\neq -1;n\in\mathbb{Z}^*)$ | $\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$ | لكل $x$ من $I$ , $u(x)\neq 0$ |
| $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ | $2\sqrt{u}+c$ | لكل $x$ من $I$ , $u(x)>0$ |
| $u'u^r$ $(r\in\mathbb{Q}-\{-1\})$ | $\frac{1}{r+1}u^{r+1}+c$ | لكل $x$ من $I$ , $u(x)>0$ |
| $\frac{u'}{u}$ | $\ln(\lvert u\rvert)+c$ | لكل $x$ من $I$ , $u(x)\neq 0$ |
| $u'e^u$ | $e^u+c$ | لكل $x$ من $I$ |



للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma



## ل. حساب التكامل

**1. تعريف :**

لتكن $f$ دالة متصلة على مجال $[a,b]$ و $F$ دالة أصلية لها على $[a,b]$.

تكامل $f$ من $a$ إلى $b$ هو العدد الحقيقي : $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$

**2. ملاحظات :**

- نكتب $\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b$
- يمكن تغيير $x$ بأي متغير آخر مثلا : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = .....$

**3. خاصيات :**

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

**4. خطانية التكامل :**

خاصية :

لتكن $f$ و $g$ دالتان متصلتان على المجال $[a,b]$ .لدينا :

- $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx \quad (\alpha\in\mathbb{R})$

**1. خاصية :**

لتكن $f$ و $g$ دالتان متصلتان على المجال $[a,b]$ .لدينا :

- إذا كانت $f\geq 0$ على $[a,b]$ فإن $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- إذا كانت $f\leq 0$ على $[a,b]$ فإن $\int_a^b f(x)dx \leq 0$
- إذا كانت $f\leq g$ على $[a,b]$ فإن $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

**2. القيمة المتوسطة :**

تعريف و خاصية :

- لتكن $f$ دالة متصلة على مجال $[a,b]$ . العدد $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ يسمى القيمة المتوسطة ل $f$ على $[a,b]$

يوجد على الأقل عدد $c$ من $[a,b]$ بحيث : $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

ب. باستعمال المكاملة بالأجزاء:

خاصية :

لتكن $u$ و $v$ دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال $I$ حيث $u'$ و $v'$ متصلتان على $I$ و $a$ و $b$ عنصرين من $I$ لدينا :

$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$



للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

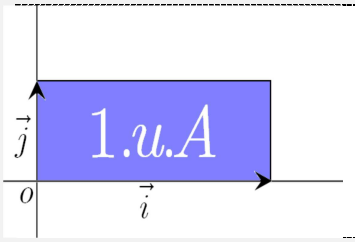


## I. حساب المساحات :

ليكن المستوى منسوبا إلى معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$

وحدة المساحة $u.A$ هي مساحة المستطيل المحدد بالنقطة $O$ و المتجهتين $\vec{i}$ و $\vec{j}$

$$1u.A = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$




خاصية 1: لتكن $f$ دالة متصلة على مجال $[a,b]$

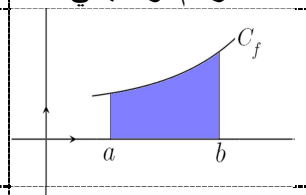
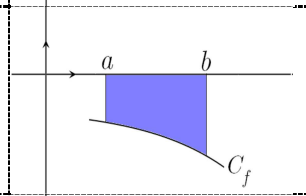
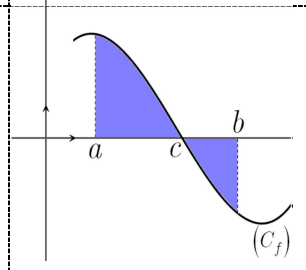
مساحة الحيز المحصور بين $(C_f)$ و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$ هي :

$$\left(\int_a^b |f(x)|dx\right)u.A$$

خاصية 2: لتكن $f$ و $g$ دالتان متصلتان على المجال $[a,b]$

مساحة الحيز المحصور بين $(C_f)$ و $(C_g)$ و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$ هي :

$$\left(\int_a^b |f(x)-g(x)|dx\right)u.A$$

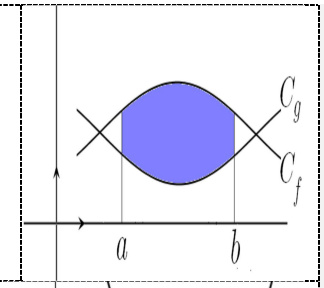
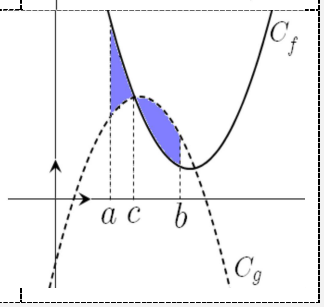
| رسم توضيحي | ملاحظات | مساحة الحيز الملون في الرسم هي: |
|---|---|---|
|   | $f$ موجبة على المجال $[a,b]$ | $\left(\int_a^b f(x)dx\right)u.A$ |
|   | $f$ سالبة على المجال $[a,b]$ | $\left(\int_a^b -f(x)dx\right)u.A$ |
|   | • $f$ موجبة على المجال $[a,c]$ و • $f$ سالبة على المجال $[c,b]$ | $\left(\int_a^c f(x)dx + \int_c^b -f(x)dx\right)u.A$ |



للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma



| | | |
|---|---|---|
|  | $(C_f)$ يوجد فوق $(C_g)$ على المجال $[a,b]$ | $\left(\int_a^b (f(x)-g(x))dx\right)u.A$ |
|  | • $(C_f)$ يوجد فوق $(C_g)$ على المجال $[a,c]$<br>و<br>• $(C_f)$ يوجد تحت $(C_g)$ على المجال $[c,b]$ | $\left((f(x)-g(x))dx+\int_c^b (g(x)-f(x))dx\right)u.A$ |

## I. حساب الحجوم :

خاصية 1:

ليكن $(\Sigma)$ مجسما محصورا بين المستويين $(P_1)$ و $(P_2)$ اللذين معادلتاهما على التوالي : $z=a$ و $z=b$ $(a<b)$

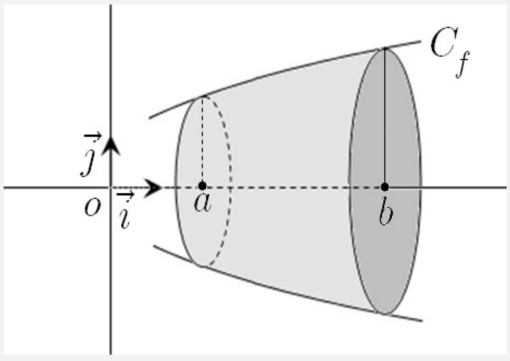
و لتكن $S(t)$ مساحة تقاطع المجسم $(\Sigma)$ مع المستوى الذي معادلته $z=t$ حيث $a\le t\le b$

إذا كانت الدالة : $t\mapsto S(t)$ متصلة على المجال $[a,b]$ فإن $V$ حجم المجسم $(\Sigma)$ هو $V=\int_a^b S(t)dt$ بوحدة قياس الحجم

خاصية 2:

حجم المجسم المولد بدوران $(C_f)$ حول محور الأفاصيل دورة كاملة في مجال $[a,b]$ هو :

$V=\left[\int_a^b \pi(f(x))^2 dx\right]uv$ حيث : $uv$ : وحدة الحجوم




つづく



للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma