ثانوية الجولان التأهيلية
بيوكرى

السنة الثانية بكالوريا
علوم رياضية

السنة الدراسية :
2011 – 2010

سلسلة التمارين رقم :01

الأستاذ : أحمد مومنى

النهايات و الاتصال

التمرين رقم 01

لتكن f دالة عددية معرفة على R^+ وتحقق الشروط التالية:

I) – f متصلة على R^+

II) – $(\forall x \in R^+): \quad f(x) \rangle 0$

III) – $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\delta \langle 1$

1 – a – نفترض أن: $(\forall x \in R_+^*): \; f(x)\le x$

بين أن : $f(0)\le 0$

b – استنتج أنه يوجد عدد حقيقي موجب قطعا α

بحيث: $f(\alpha)\rangle\alpha$

2 – a – بين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=-\infty$

b – استنتج أنه يوجد عدد حقيقي موجب قطعا β

بحيث: $f(\beta)\langle\beta$

التمرين رقم 02:

أحسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{\sqrt{3}}}\dfrac{6\arctan x-\pi}{3x^2-\sqrt{3}x}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt[3]{\dfrac{1+2x}{x^4}}}$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}}\sqrt[12]{x}$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[15]{x^3}}{3\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x}}$

و $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(2\operatorname{Arctan}x)}{\operatorname{Arctan}(\sin 2x)}$

و $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[4]{x+1}}{x}$

و $\lim\limits_{x\to0}\operatorname{Arctan}\left[\dfrac{(\cos 2x-\cos x)\sin x}{\sqrt{3}(\tan x-\sin x)}\right]$

التمرين رقم : 03

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\pi,\pi[$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{4x^3+1}-\sqrt[3]{3x^3+1}}{2x^2\sin x} & , \quad x\in]0,\pi[\\ f(x)=\dfrac{1}{6}+\dfrac{x\sqrt[5]{4-x}}{2+\sin\frac{1}{x}} & , \quad x\in]-\pi,0[\\ f(0)=\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

بين أن الدالة f متصلة على المجال $]-\pi,\pi[$

التمرين رقم : 04

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي:

$f(x)=\left(\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{3-\sqrt[3]{x}}\right)^3$ و لتكن (E) المعادلة التالية :

$f(x)+125=0$

1 – حدد D_f حيز تعريف الدالة f

2 – a – أدرس إشارة $f(x)$ على D_f (يمكن وضع $\sqrt[3]{x}=t$)

b – استنتج أنه إذا كان x حل للمعادلة (E) فإن $x\in]1,27[$

3 – حدد مجموعة حلول المعادلة (E)

التمرين رقم :05

1 – بين أن لكل x و y من $]0,+\infty[$:

$$\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}=x^{\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

2 – استنتج أن :

$$\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=\sqrt{\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}\right)^3}$$

3 – استنتج أنه لكل a و b من $]0,+\infty[$:

$$a+b+\sqrt[3]{ab}\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)+2\sqrt{\left(a+\sqrt[3]{a^2b}\right)\left(b+\sqrt[3]{ab^2}\right)}=\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)^3$$

التمرين رقم: 06

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{2}+\frac{x\sqrt{3-x}}{2+\sin\frac{1}{x}}\cos\left(1-\sin\frac{1}{x}\right) & ; \quad x\langle 0 \\ f(x)=\frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)^3}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-2}\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right) & ; \quad x\rangle 0 \\ f(0)=\frac{1}{2} \end{cases}$$

1 – بين أن : $\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|\leq 2|x| \qquad (\forall x\in]-1,0[)$

2 – أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ (يمكن وضع $y=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$)

3 – أدرس اتصال الدالة f في النقطة 0

التمرين رقم: 07

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على R بما يلي:

$$f(x)=Arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$$

1 – بين أن: $0\langle f(x)\langle\frac{\pi}{2} \qquad (\forall x\in R)$

2 –a - أثبت أن:

$$(\forall x\in R) \qquad 1-\tan^2(f(x))=2x\tan(f(x))$$

b - استنتج أن لكل x من R: $\tan\left(\frac{\pi}{2}-2f(x)\right)=x$

3 – استنتج أن: $f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}Arctan\,x \qquad (\forall x\in R)$

4 – a – بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل على الأقل حلا ω في المجال [0,1]

b – بين أن: $Arctan\,x+Arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$ لكل x من R_+^*

c – استنتج أن: $Arctan\frac{1}{\omega}=2\omega$

التمرين رقم: 08

1 – لتكن f دالة عددية متصلة على قطعة [a,b] حيث:

$$1+f(a)\rangle a^3 \quad \text{و} \quad 1+f(b)\langle ab^2$$

بين أنه يوجد على الأقل عدد حقيقي β من المجال [a,b] بحيث:

$$f(\beta)=a\beta^2-1$$

2 لتكن f دالة عددية متصلة على المجال I=[2004,3000] بحيث:

$$f(2004)\langle 6{,}012.10^6 \quad \text{و} \quad f(3000)\rangle 9.10^6$$

بين أن : $(\exists\alpha\in I): f(x)=3000x$

التمرين رقم: 09

أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt[5]{x}+\sqrt[6]{x}} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{-x^3+1}-\sqrt[3]{x^2-1}}{x}$$

و $\lim\limits_{x\to 2}\tan\left(\frac{96\pi}{11}\left(\frac{\sqrt[4]{x+14}-\sqrt[3]{10-x}}{x-2}\right)\right)$

و $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[4]{1-x}}{x}\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x+1}+1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{\pi}{3}\sqrt[12]{x}\left(\frac{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}}\right)\right)$

التمرين رقم: 10

لتكن f الدالة العددية المعرفة على R^+ كما يلي:

$$f(x)=Arctan\left(\frac{x-1}{2x+1}\right)+Arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)-\frac{\pi}{4}$$

1 – بين أن: $0\leq Arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)\langle\frac{\pi}{4} \qquad (\forall x\in R^+)$

2 – a – إستنتج انه إذا كانx حل للمعادلة $f(x)=0$ فإن:

$$0\langle Arctan\left(\frac{x-1}{2x+1}\right)\leq\frac{\pi}{4}$$

b – إستنتج ان: $(f(x)=0)\Rightarrow x\rangle 1$

3 – بين أن المعادلة: $f(x)=0$ تقبل على الأقل حل في المجال $]1,+\infty[$

4 – حل في R^+ المعادلة: $f(x)=0$

التمرين رقم: 11

1 – لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي:

$$f(x)=\frac{\sqrt[4]{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}}$$

a – حل في المجال $[-1,+\infty[$ المعادلة :

$$\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}=0$$

b– استنتج أن: $D_f=]-1,0[\cup]0,+\infty[$

c– بين أن:

$$(\forall x\in D_f): \qquad f(x)=\frac{1}{\sqrt[12]{1+x}\left(1+\sqrt[12]{1+x}\right)}$$

d – أحسب النهايات التالية: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)$ و

$$\lim_{x\to 0}f(x)$$

التمرين رقم 12:

لتكن f وg دالتين معرفتين و متصلتين على مجال [a,b] بحيث:

$f(x) \leq g(x)$ لكل x من[a,b].

α و β عددين حقيقيين من المجال [a,b] يحققان ما يلي :

$f(\alpha)=\alpha$ و $g(\beta)=\beta$

بين أن المعادلة التالية تقبل على الأقل حلا واحدا في المجال [a,b]:

$$\lambda f(x)+(1-\lambda)g(x)=x$$

حيث λ عدد حقيقي من المجال[1,0]

التمرين رقم 13:

لتكن f الدالة العددية المعرفة

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{-7}{2}+\dfrac{1-\sqrt[3]{-(2+x)}}{2} & ; \quad x \langle -2 \\ f(x)=x^3-3x-1 & ; \quad x \geq -2 \end{cases}$$

1 – a – حدد D_f حيز تعريف الدالة f

b – أحسب النهايتين $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

c – أدرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$

2 – a – بين أن f تقابل من المجال $I=]-\infty,-2[$ نحو مجال J يجب تحديده

b – حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J

3 – a – حل في المجال $[-\pi,\pi]$ المعدلة : $\cos 3y=\dfrac{1}{2}$

b – تحقق أن :

$$(\forall y \in \mathbb{R}) \qquad \cos(3y)+3\cos y=4\cos^3 y$$

4 – ليكن g قصور الدالة f على المجال $[-2,+\infty[$

a – أدرس رتابة الدالة g على المجال $[-2,+\infty[$

b – بين المعادلة $g(x)=0$ تقبل بالضبط 3 حلول α و β و λ من المجال $[-2,2]$

5 – a – بوضع $x=2\cos y$ بين أن: المعادلة $g(x)=0$ تكافئ $\cos 3y=\dfrac{1}{2}$

b – استنتج أن: قيم α و β و λ هي بالضبط $2\cos\dfrac{\pi}{9}$ و $2\cos\dfrac{5\pi}{9}$ و $2\cos\dfrac{7\pi}{9}$

التمرين رقم 14 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة كما يلي :

$$f(x)=x^2+x-2x\sqrt{x}+2 \qquad \left(x \in \mathbb{R}^+\right)$$

1- بين أن f تقابل من المجال $]1,+\infty[$ نحو مجال J يجب تحديده

2- بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α > 1 بحيث:

$$\alpha^2+\alpha=2\alpha\sqrt{\alpha}+3$$

3 – بين أن: $f^{-1}(x)=\dfrac{\left(1+\sqrt{1+4\sqrt{x-2}}\right)^2}{4} \qquad (\forall x \geq 2)$

4 – استنتج قيمة العدد α

التمرين رقم 15 :

ليكن a و b عددين حقيقيين موجبين قطعا و f دالة عددية معرفة ومتصلة على المجال $[0,1]$

و لتكن h الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$h(x)=f(x)-\frac{af(0)+bf(1)}{a+b}$$

1 – أ – بين أن الدالة h متصلة على المجال $[0,1]$

ب – تحقق أن : $h(0)=\dfrac{b\left[f(0)-f(1)\right]}{a+b}$ و $h(1)=\dfrac{a\left[f(1)-f(0)\right]}{a+b}$

2 – نفترض أن : $f(0) \neq f(1)$

بين أنه يوجد على الأقل عدد حقيقي $\beta \in]0,1[$ بحيث :

$$f(\beta)=\frac{af(0)+bf(1)}{a+b}$$

التمرين رقم 16:

تأطير حل المعادلة $f(x)=0$ بطريقة التفرع الثنائي (La méthode de la dichotomie)

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=x^2-3x+1$

1 – بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل بالضبط حلين في $\mathbb{R}$

2 – بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]0,1[$

3 – a – أحسب ما يلي : $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ و $f\left(\dfrac{1}{4}\right)$ و $f\left(\dfrac{3}{8}\right)$ و $f\left(\dfrac{7}{16}\right)$

b – باستعمال طريقة التفرع الثنائي بين أن :

$$0{,}375 \langle \alpha \langle 0{,}4375$$

(تأطير للعدد α سعته 625×10^{-3})

AHMED MOUMNI