هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

2011 - 2012

تصحيح الفرض المحروس رقم ③ الأسدس II

التمرين ①:

① لحل المعادلة : $z^2 - 2i\sqrt{3}z - 4 = 0$

$\Delta = 4 = 2^2$ ومنه :

$z_1 = \frac{2i\sqrt{3} - 2}{2} = -1 + \sqrt{3}i$

$z_2 = \frac{2i\sqrt{3} + 2}{2} = 1 + \sqrt{3}i$

إذن مجموعة حلول المعادلة هي :

$S = \{1 + \sqrt{3}i ; -1 + \sqrt{3}i\}$.

② أ.

لكل نقطة $M(z)$ من المستوى العقدي نض z_2 و z_1 وليكن $M_1 = R_1(M)$ و $M_2 = R_2(M)$ لتكن النقطتين M_1 و M_2.

$R_1(M) = M_1 \Leftrightarrow z_1 = ze^{i\frac{\pi}{3}}$

$R_2(M_1) = M_2 \Leftrightarrow z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z_1 - b) + b$

ومنه $R_2 \circ R_1(M) \Leftrightarrow z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}(ze^{i\frac{\pi}{3}} - b) + b$

$\Leftrightarrow z_2 = -z - be^{i\frac{2\pi}{3}} + b$

ومنه $f(B) = R_2 \circ R_1(B) \Leftrightarrow z_2 = -b - be^{i\frac{2\pi}{3}} + b$

$\Leftrightarrow z_2 = -2e^{i(\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3})}$

$\Leftrightarrow z_2 = -2e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$\Leftrightarrow z_2 = 2 + i\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow z_2 = a$

ومنه : $f(B) = A$.

ب-(ند)

$N = R_1(M) \Leftrightarrow n = me^{i\frac{\pi}{3}}$

$\Leftrightarrow n = \frac{1}{2}m + \frac{\sqrt{3}}{2}mi$

(ند)

لدينا الكتابة العقدية للتطبيق f

$z' = -2 - b(e^{i\frac{2\pi}{3}} - 1)$

$z' = -2 - (\sqrt{3}i - 3)(\frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{2})$

$z' = -2 - (\frac{-3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}i - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{2})$

$z' = -2 + 2\sqrt{3}i$

ومنه :

$f(M) = M' \Leftrightarrow m' = -m + 2\sqrt{3}i$

التمثيل العقدي للتطبيق f من المثال :

$a = 1 \in \mathbb{R} - \{1\}$ حيث : $z' = az + b$

إذن حالات تطبيق f هو التحاكي الذي مركزه -1 ونسبته $2(\sqrt{3}i)$

ب

$(M, M', M$ نقط مستقيمية $) \Leftrightarrow \frac{m' - m}{n - m} \in \mathbb{R}$

$\frac{m' - m}{n - m} = \frac{-m + 2i\sqrt{3} - m}{\frac{1}{2}m + \frac{\sqrt{3}}{2}im - m}$

$= \frac{2(-m + i\sqrt{3})}{\frac{1}{2}m(-1 + \sqrt{3}i)}$

$= \frac{4(-m + i\sqrt{3})}{m(-1 + \sqrt{3}i)}$

$\frac{m' - m}{n - m} \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{4(-m + i\sqrt{3})}{m(-1 + \sqrt{3}i)} = \frac{4(-\bar{m} + i\sqrt{3})}{\bar{m}(-1 + \sqrt{3}i)}$

$\Rightarrow \bar{m}(-m + i\sqrt{3}) = m(-\bar{m} + i\sqrt{3})$

$\Rightarrow -|m|^2 + i\sqrt{3}\bar{m} = -|m|^2 + i\sqrt{3}m$

$\Rightarrow m = \bar{m}$

$\Rightarrow m \in \mathbb{R}$

ومنه : مجموعة النقط $M(m)$ التي يكون من أجلها M و N و M' مستقيمية هو محور الأفاصيل $(\Delta) : y = 0$

التمرين ② :

1-أ. لنبين أن $(E, \perp)$ زمرة تبادلية.

لدينا : $E \neq \emptyset$ ($\exists$ أجل $a = b = 0$ حيث $\begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix} \in E$ المصفوفة المنعدمة $\in E$)

ليكن A و B عنصرين من E.

$(x, y, a, b) \in \mathbb{R}^4$

$A\begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix}$ و $B\begin{pmatrix} x & y \\ -2y & x+2y \end{pmatrix}$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

$A-B=\begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x & -y \\ 2y & -x-2y \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a-x & b-y \\ -2(b-y) & (a-x)+2(b-y) \end{pmatrix}$

نضع: $\alpha = a-x$ و $\beta = b-y$ $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

$A-B=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -2\beta & \alpha+2\beta \end{pmatrix}\in E$

إذن: $(E,+)$ زمرة جزئية من الزمرة $(M_2(\mathbb{R}),+)$

وبما أن: $(M_2(\mathbb{R}),+)$ زمرة تبادلية

فإن: $(E,+)$ زمرة تبادلية.

ب- لنبين أن: $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي

لدينا:

$(M_2(\mathbb{R}),+)$ زمرة جزئية من $(E,+)$

لنبين أن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\cdot)$

ليكن $\gamma\in\mathbb{R}$ و $M_{(a,b)}$ عنصرا من E

$\gamma M=\gamma\begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \gamma a & \gamma b \\ -2\gamma b & \gamma a+2\gamma b \end{pmatrix}$

نضع: $\gamma a=\alpha$ و $\gamma b=\beta$

$\gamma M=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -2\beta & \alpha+2\beta \end{pmatrix}\in E$ $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

إذن: E جزء مستقر في $(M_2(\mathbb{R}),\cdot)$

وبما أن: $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء متجهي

فإن: $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي

لنحدد بعده

$M\in E$

$M=\begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

$=aI+bJ$

إذن: (I,J) أسرة مولدة للفضاء $(E,+,\cdot)$

$M=\hat{0}\Rightarrow\begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow a=0$ و $b=0$

إذن: الأسرة (I,J) حرة.

وعليه: (I,J) أساس للفضاء المتجهي $(E,+,\cdot)$

إذن: $\dim E=2$

2- $J^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

$=-2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

$=-2I+2J$

لنستنتج البداد $M(a,b)\times M(c,d)$

$M(a,b)\times M(c,d)=(aI+bJ)\times(cI+dJ)$

$=acI+adJ+bcJ+bdJ^2$

$=acI+adJ+bcJ+2bdJ-2bdI$

$=(ac-2bd)I+(ad+bc+2bd)J$

ج- لنبين أن f تقابل.

ليكن $M\in E$ و a و b من $\mathbb{R}$

نضع $z=x+yi$ $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$f(M(a,b))=z\Rightarrow(a+b)+bi=x+yi$

$\Rightarrow\begin{cases} a+b=x \\ b=y \end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases} a=x-y \\ b=y \end{cases}$

وهذا: $(\forall z\in\mathbb{C})\ (\exists!\ M(a,b)\in E)\ /\!/\ f(M(a,b))=z$

إذن: f تقابل من E نحو $\mathbb{C}$.

التقابل العكسي

$f^{-1}:\mathbb{C}\longrightarrow E$

$z=x+yi\longrightarrow M(x-y,y)$

ب- لنبين أن f تشاكل من $(E,\times)$ نحو $(\mathbb{C},\times)$

ليكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ عنصرين من E.

$f(M(a,b)\times M(c,d))=f(M(ac-2bd,ad+bc+2bd))$

$=(ac+ad+bc)+(ad+bc+2bd)i$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

ومن جهة أخرى :

$f(M(a,b)) \times f(M(c,d)) = (a+b)+ai)((c+d)+di)$

$= ac+ad+ic+bd+(a+b)di+(c+d)bi$
$-bd$

$= (ac+ad+bc)+(ad+bc+2bd)i$

$= f(M(a,b) \times M(c,d))$

ومنه : f تشاكل من $(E,\times)$ نحو $(E,\times)$

ج. لنستنتج بنية $(E,+,\times)$

لدينا :

$(E,+)$ زمرة تبادلية.

f تشاكل تقابلي من $(E,\times)$ نحو $(E,\times)$

و

$f^{-1}(E^*) = E^*$

لدينا : $(E^*,\times)$ زمرة تبادلية.

إذن $(E^*,\times)$ زمرة تبادلية.

و من خلال السؤال 2 جزء هذا السؤال E جزء من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

لدينا : X توزيعي على $+$ في $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

ومنه

X توزيعي على $+$ في E.

نستنتج أن :

$(E,+,\times)$ جسم تبادلي.

3- لنحدد في E حلول المعادلة

$M^3 - I + J = 0$ حيث f المعرفة على $M_2(\mathbb{R})$

$M^3 - I + J = 0 \Rightarrow f(M^3) = f(I-J)$

$\Rightarrow (f(M))^3 = -i$

$\Rightarrow ((a+b)+bi)^3 = -i$

نضع $z = x+yi$ $\quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$z^3 = -i \Rightarrow z^3 - i = 0$

$\Rightarrow (z+i)(z^2+zi-1) = 0$

$\Rightarrow z = -i$ أو $z^2+zi-1 = 0$

$\Delta = 3 = (\sqrt{3})^2$

$z = \frac{-i-\sqrt{3}}{2}$ أو $z = \frac{-i+\sqrt{3}}{2}$

لدينا : $z = (a+b)+bi$

$\begin{cases} b = -1 \\ a = 1 \end{cases}$ أو $\begin{cases} b = -\frac{1}{2} \\ a+b = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ أو $\begin{cases} b = -\frac{1}{2} \\ a+b = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

ومنه حلول المعادلة هي :

$S = \{M(1,-1); M(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, -\frac{1}{2}); M(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})\}$

التمرين ③

الجزء I :

$f(1) = 1$ و $f(x) = \frac{x-1}{x \ln x}$ $\quad x \neq 1$

1. لنبين أن الدالة متصلة في 1

$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{\frac{\ln(x)}{x-1}}\right) \times \frac{1}{x}$

$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 1} f(x) = 1 = f(1)$ $\left(\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1\right)$

ومنه f متصلة في 1

ولدينا

$D - \{1\}$ متصلة في $x \mapsto x \ln x$

وغير منعدمة على هذا المجال

$D - \{1\}$ متصلة في $x \mapsto x-1$

ومنه :

$D - \{1\}$ متصلة في $x \mapsto \frac{x-1}{x \ln x}$

ومتصلة في 1.

ومنه : الدالة f متصلة على D.

2. أ. بين

$(\forall x \in D - \{1\})$ $f'(x) = \frac{\ln x - x + 1}{(x \ln x)^2}$

$f'(x) = \frac{x \ln x - (\ln x + 1)(x-1)}{(x \ln x)^2}$

$f'(x) = \frac{\ln x - x + 1}{(x \ln x)^2}$ $\quad (\forall x \in D - \{1\})$

ب- لنبين أن الدالة f تناقصية على D.

نضع $g(x) = \ln x - x + 1$

$g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

$\forall x \in D-\{1\}$ ، $g(x) < 0$ ومنه :

ومنه : $f'(x) < 0 \quad \forall x \in D-\{1\}$

و عليه f تناقصية قطعا على D .

الجزء (2) :

1) أ- $\forall x \in]0,1[$

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\,dt = \left[\ln\left|\ln(t)\right|\right]_x^{x^2}$$

$$= \ln\left|\ln(x^2)\right| - \ln\left|\ln(x)\right|$$

$$= \ln\left(\left|\frac{2\ln(x)}{\ln(x)}\right|\right)$$

$$= \ln(2)$$

وعليه :

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\,dt = \ln(2) \qquad (\forall x \in]0,1[)$$

ب. لنبين أن : $(\forall x \in]0,1[)$

$$(x^2-1)\ln(2) \leqslant F(x) \leqslant (x-1)\ln(2)$$

لدينا : $x^2 < x \qquad \forall x \in]0,1[$

ومنه $x^2 \leqslant t \leqslant x \Rightarrow x^2-1 \leqslant t-1 \leqslant x-1$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{t\ln(t)} \leqslant \frac{t-1}{t\ln(t)} \leqslant \frac{x^2-1}{t\ln(t)} \qquad \left(\frac{1}{t\ln(t)} < 0\right)$$

$(x^2 < x) \quad \forall t \in]0,1[$

$$(x^2-1)\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\,dt \leqslant F(x) \leqslant (x-1)\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\,dt$$

$$(x^2-1)\ln(2) \leqslant F(x) \leqslant (x-1)\ln(2)$$

$(\forall x \in]0,1[)$

ج- لندرس قابلية اشتقاق الدالة F على يمين 0 .

$$\lim_{x\to 0^+} (x^2-1)\ln(2) = \lim_{x\to 0^+} (x-1)\ln(2) = -\ln(2)$$

ومنه :

$$\lim_{x\to 0^+} F(x) = -\ln(2) = F(0)$$

ومنه : F متصلة على يمين 0 .

لندرس اتصال الدالة على يسار 1.

$$\lim_{x\to 1^-} (x^2-1)\ln(2) = \lim_{x\to 1^-} (x-1)\ln(2) = 0$$

و عليه :

$$\lim_{x\to 1^-} F(x) = 0 = F(1)$$

ومنه : F متصلة على يسار 1

2) أ- لنبين أن : $(\forall x \in]0,1[)$

$$\frac{x^2-x}{2\ln x} \leqslant F(x)+\ln(2) \leqslant \frac{x^2-x}{\ln(x)} \qquad \forall x \in]0,1[$$

$$F(x)+\ln(2) = \int_x^{x^2} \frac{t-1}{t\ln(t)}\,dt + \int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\,dt$$

$$= \int_x^{x^2} \frac{t}{t\ln(t)}\,dt$$

$$= \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,dt$$

لدينا : $x^2 < x \qquad (\forall x \in]0,1[)$

$$x^2 \leqslant t \leqslant x \Rightarrow 2\ln(x) \leqslant \ln(t) \leqslant \ln(x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\ln(x)} \leqslant \frac{1}{\ln(t)} \leqslant \frac{1}{2\ln(x)}$$

$$\Rightarrow \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(x)}\,dt \leqslant \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,dt \leqslant \int_x^{x^2} \frac{1}{2\ln(x)}\,dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\ln(x)}[t]_x^{x^2} \leqslant F(x)+\ln(2) \leqslant \frac{1}{\ln(x)}[t]_x^{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-x}{2\ln(x)} \leqslant F(x)+\ln(2) \leqslant \frac{x^2-x}{\ln(x)}$$

$(\forall x \in]0,1[)$

ب- لندرس قابلية اشتقاق F على يمين 0.

$$\frac{F(x)-F(0)}{x} = \frac{F(x)+\ln(2)}{x}$$

$$\frac{x-1}{2\ln(x)} \leqslant \frac{F(x)+\ln(2)}{x} \leqslant \frac{x-1}{\ln(x)} \qquad \forall x \in]0,1[$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x-1}{2\ln(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-1}{\ln(x)} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)+\ln(2)}{x} = 0 \in \mathbb{R}$$

و عليه :

إذن F قابلة للاشتقاق على يمين 0.

3) أ- لدينا : $t \to f(t)$ متصلة على $[x,x^2]$ $(\forall x > 1)$

و عليه : $\exists c \in [x,x^2] / f(c) = \frac{1}{x^2-x} F(x)$

أي : $\exists c \in [x,x^2] / F(x) = (x^2-x) f(c)$

$(\forall x > 1)$

ب- $x \leqslant c \leqslant x^2 \Rightarrow f(x^2) \leqslant f(c) \leqslant f(x)$

(f تناقصية قطعا على $[x,x^2]$ ، $x^2 > x$ ، $(\forall x > 1)$)

و عليه :

$$(x^2-x) f(x^2) \leqslant (x^2-x) f(c) \leqslant (x^2-x) f(x)$$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

ومنه فهي تقبل دالة أصلية G بحيث :

$F(x) = G(x^2) - G(x)$.

$]0,+\infty[\ni x \xrightarrow{g} x^2$ قابلة للاشتقاق و $g(]0,1[) \subset]0,1[$

$g(]1,+\infty[) \subset]1,+\infty[$

$x \longrightarrow G(x)$ قابلة للاشتقاق على $]0,1[\cup]1,+\infty[$

ومنه : $x \xrightarrow{F} G \circ g(x)$ قابلة للاشتقاق على كل من $]0,1[$ و $]1,+\infty[$

$F'(x) = 2x\,G'(x^2) - G'(x)$

$= 2x\,f(x^2) - f(x)$

$= 2x\left(\frac{x^2-1}{2x^2\ln(x)}\right) - \left(\frac{x-1}{x\ln(x)}\right)$

$= \frac{x^2-x}{x\ln(x)}$

$= \frac{x-1}{\ln(x)}$

$\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$ $\quad \frac{x-1}{\ln(x)} > 0$

و عليه F تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$.

جدول التغيرات

x	0		1		$+\infty$
$F'(x)$	‖	$+$	‖	$+$	
$F(x)$	$-\ln(2)$	↗	0	↗	$+\infty$

منجز التلميذة : أمينة صامو

تحت إشراف الأستاذ :

المانتوبو شعيب .

$(x^2-x)f(x^2) \leqslant F(x) \leqslant (x^2-x)f(x)$

$\lim_{x \to 1^+} (x^2-x)f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^2-x)f(x^2) = 0$

ومنه : $\lim_{x \to 1^+} F(x) = 0 = F(1)$

إذن F متصلة على يمين النقطة 1 ←

$\frac{F(x)-F(1)}{x-1} = \frac{F(x)}{x-1}$

$x f(x^2) \leqslant \frac{F(x)}{x-1} \leqslant x f(x)$

$\lim_{x \to 1^+} x f(x^2) = \lim_{x \to 1^+} x f(x) = 1$

و عليه : $\lim_{x \to 1^+} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} = 1 \in \mathbb{R}$

إذن F قابلة للاشتقاق على يمين النقطة 1 ←

ج - لنبين أن : $F(x) \geqslant \ln x$.

لدينا

$F(x) - \ln(x) = \int_1^{x^2} \frac{t-1}{t\ln(t)}dt - \int_1^{x^2} \frac{1}{t}dt$

$= \int_1^{x^2} \frac{t-1-\ln(t)}{t\ln(t)}dt$

$= \int_1^{x^2} \frac{-(\ln(t)-t+1)}{t\ln(t)}dt$

(لدينا من خلال س 2 ب)

$-(\ln(t)-t+1) = -g(t) \geqslant 0$ $\quad \forall t \in]1,+\infty[$

$t\ln(t) > 0$ و منه

$\int_1^{x^2} \frac{-(\ln(t)-t+1)}{t\ln(t)}dt \geqslant 0$

أي :

$F(x) \geqslant \ln(x) \quad \forall x \in]1,+\infty[$

لنحسب $\lim_{x \to +\infty} F(x)$

$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

حسب مصاديق التقارب

$\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$

د - لنبين أن F قابلة للاشتقاق على كل من $]1,+\infty[$ و $]0,1[$

$t \longmapsto f(t)$ متصلة على كل من $]0,1[$ و $]1,+\infty[$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma