هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

الجزء (1)

1) لدينا : $D_f = \mathbb{R}$

لأن : $(x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R})$

و : $f(-x) = \frac{\arctan(-x)}{-x} = \frac{-\arctan(x)}{-x}$

$= f(x)$

(لأن : $t \to \arctan(t)$ دالة فردية) .

$\Leftarrow$ إذن الدالة f دالة زوجية .

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\arctan(x)}{x} = 0$

(لأن $\lim_{x \to +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$)

---

2) $(\forall t \in \mathbb{R}^+)$: $t^4 \geq 0 \Rightarrow -t^4 \leq 0$

$\Rightarrow 1 - t^4 \leq 1$

حيث : $1 - t^4 = (1 - t^2)(1 + t^2)$

و $(1 + t^2 > 0)$ ،

إذن ، $(1 - t^2)(1 + t^2) \leq 1$

أي ① $\left(1 - t^2 \leq \frac{1}{1 + t^2}\right)$

ولدينا أيضا ، $(\forall t \in \mathbb{R}^+)$ $t^2 + 1 \geq 1$

إذن ② $\left(\frac{1}{t^2+1} \leq 1\right)$

من ② و ① $\Rightarrow 1 - t^2 \leq \frac{1}{t^2+1} \leq 1$.

- لدينا $(\forall t \in \mathbb{R}^+)$ $1 - t^2 \leq \frac{1}{t^2+1} \leq 1$

$(x > 0)$ $\int_0^x (1 - t^2)\,dt \leq \int_0^x \frac{1}{t^2+1}\,dt \leq \int_0^x dt$

$\left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^x \leq \left[\text{Arct}(t)\right]_0^x \leq [t]_0^x$

أي $x - \frac{x^3}{3} \leq \text{Arct}(x) \leq x$

ب . لدينا $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

أي : $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - 1}{x - 0}$

أي $\lim_{x \to 0^+} \frac{\text{Arctan}(x) - x}{x^2}$

ولدينا $(\forall t \geq 0)$ $t - \frac{t^3}{3} \leq \text{Arct}(t) \leq t$

إذن $-\frac{x^3}{3} \leq \text{Arct}(x) - x \leq 0$

أي $-\frac{x}{3} \leq \frac{\text{Arct}(x) - x}{x^2} \leq 0$

وحسب $\lim_{x \to 0^+} \left(-\frac{x}{3}\right) = 0$

إذن $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$

---

3) أ- لتكن $t \xrightarrow{f} \text{Arct}(t)$ ،

f دالة متصلة على $[0, x]$ و قابلة للاشتقاق على $]0, x[$. إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية .

$(\exists c \in]0, x[)$ $\text{Arct}(x) - \text{Arct}(0) = (x - 0) f'(c)$

أي $\text{Arct}(x) = x f'(c)$

وحيث : $f'(c) = \frac{1}{1 + c^2}$.

و $0 \leq c \leq x \Rightarrow 1 \leq c^2 + 1 \leq x^2 + 1$ ،

أي $\frac{1}{1 + c^2} \geq \frac{1}{x^2 + 1}$

أي $(x > 0)$ $\frac{x}{1 + c^2} \geq \frac{x}{x^2 + 1}$

أي $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ $\text{Arct}(x) \geq \frac{x}{x^2 + 1}$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

ب - لدينا f متصلة على $\mathbb{R}^*$

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)x - \operatorname{Arctan}(x)}{x^2}$$

و

$$= \frac{x - (1+x^2)\operatorname{Arctan}(x)}{(1+x^2)x^2}$$

- لدينا $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad \arctan(x) \geq \frac{x}{x^2+1}$

أي $x - \operatorname{Arctan}(x)(x^2+1) \leq 0$

أي $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : f'(x) \leq 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	

(ومنه أن الدالة f دالة زوجية)

الجزء (2).

1) لدينا : $D_g = \mathbb{R}$

لأن $(x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R})$

أي $g(-x) = \frac{1}{(-x)} \int_0^{(-x)} f(t)\,dt$

نضع : $(-t = u)$ أي $(dt = -du)$

و $\begin{cases} t = 0 \Rightarrow u = 0 \\ t = x \Rightarrow u = x \end{cases}$

إذن $g(-x) = \frac{-1}{x} \int_0^x -f(-u)\,du$

وحيث أن الدالة f دالة زوجية $(f(x) = f(-x))$

إذن $g(-x) = \frac{-1}{x} \int_0^x -f(u)\,du$

$= \frac{1}{x} \int_0^x f(u)\,du = g(x)$

الدالة g دالة زوجية

2) أ) لدينا $\frac{1}{x} \int_0^x (1 - f(t))\,dt$

$= \frac{1}{x} \left[\int_0^x 1\,dt - \int_0^x f(t)\,dt \right]$

$= \frac{1}{x} \left[[t]_0^x - \int_0^x f(t)\,dt \right]$

$= \frac{1}{x} \left[x - \int_0^x f(t)\,dt \right]$

$= 1 - \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,dt$

$= 1 - g(x)$

إذن $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}) \quad 1 - g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x (1 - f(t))\,dt$

ب) لدينا حسب (جزء 3 - أ)

$(\forall t \in \mathbb{R}^+) \quad \arctan(t) \geq \frac{t}{1+t^2}$

$(t > 0) \quad \frac{\arctan(t)}{t} \geq \frac{1}{1+t^2}$.

$f(t) \geq \frac{1}{1+t^2}$ معناه

أي $1 - f(t) \leq 1 - \frac{1}{1+t^2}$.

$x > 0 \quad \int_0^x (1 - f(t))\,dt \leq \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt$

$x > 0 \quad \frac{1}{x} \int_0^x (1 - f(t))\,dt \leq \frac{1}{x}(x - \operatorname{Arctan}(x))$

وحيث أن $(\forall t \in \mathbb{R}) \quad 0 \leq f(t) \leq 1$

ودالة حسب السؤال (3. ب)

أي $1 - f(t) \geq 0$ ،

$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{x} \int_0^x (1 - f(t))\,dt \leq 1 - \frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x}$ أي

$0 \leq g(x) \leq 1 - f(x)$ أي

$\lim_{x \to 0^+} 1 - f(x) = 1 - 1 = 0$

$1 - g(x) \geq 0$ و

إذن $\lim_{x \to 0^+} g(x) = 1 = g(0)$

أي أن g متصلة عند $x = 0$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع Talamid.ma

2- لنحسب $\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-1}{x}$

لدينا $0 \leq 1-g(x) \leq 1-f(x)$

أي $0 \leq g(x)-1 \leq f(x)-1$

و منه $\frac{0}{x} \leq \frac{g(x)-1}{x} \leq \frac{f(x)-1}{x}$ $(x>0)$

(1) $\frac{\text{Arct}(x)-x}{x^2} \leq \frac{g(x)-1}{x} \leq 0$.

$\text{arct}(x) \leq \frac{x}{1+x^2} \Rightarrow \text{Arct}(x)-x \geq \frac{-x^3}{1+x^2}$.

(2) $\frac{\text{Arct}(x)-x}{x^2} \leq \frac{-x^2}{1+x^2}$ أي

لدن من (1) و (2) نستنتج $\frac{-x^2}{1+x^2} \leq \frac{g(x)-1}{x} \leq 0$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2}{1+x^2} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(1)}{x} = 0$

لدن و حسب تعريف العدد المشتق على اليمين في 0 نجد $g'_d(0) = 0$

$1 - \frac{t^2}{3} \leq f(t) \leq 1$ و حسب

$\left[t - \frac{t^3}{9}\right]_0^1 \leq \int_0^1 f(t)\,dt \leq 1$

$1 - \frac{1}{9} \leq \int_0^1 f(t)\,dt \leq 1$

أي $\frac{8}{9x} \leq \frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,dt \leq \frac{1}{x}$ $(x>0)$

(1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,dt = 0$: لدن

و حسب $0 \leq \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt \leq \frac{\pi}{2x}\ln(x)$

لدن $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt = 0$

(لدن $\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi}{2x}\ln(x) = 0$)

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$

لدينا $(\forall t \in [1,+\infty[)\ 0 \leq \text{arct}(t) \leq \frac{\pi}{2}$

أي $0 \leq \frac{\text{arct}(t)}{t} \leq \frac{\pi}{2t}$ $t>0$

$0 \leq \int_1^x \frac{\text{arct}(t)}{t}\,dt \leq \int_1^x \frac{\pi}{2t}\,dt$ $(x>1)$

$0 \leq \int_1^x f(t)\,dt \leq \left[\frac{\pi}{2}\ln(t)\right]_1^x$

$0 \leq \int_1^x f(t)\,dt \leq \frac{\pi}{2}\ln(x)$.

و هذه النتيجة .

---

3) ب- لدينا $g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$

$= \frac{1}{x}\left(\int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^x f(t)\,dt\right)$

$= \frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,dt + \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt$

4.أ) $x \xrightarrow{u} \frac{1}{x}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$

و حسب $f(t)$ متصلة على $\mathbb{R}^{+*}$ إذن تقبل الدالة

أصلية F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$

أي $\int_0^x f(t)\,dt = F(x) - F(0)$

أي $x \xrightarrow{v} \int_0^x f(t)\,dt$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$

إذن : $g(x)$ $x \xrightarrow{v\circ u}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$

$g'(x) = \frac{-1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt + \frac{1}{x}f(x)$

$= \frac{-1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt + \frac{1}{x}\left(\frac{\text{Arctan}(x)}{x}\right)$

$x^2 g'(x) = \text{Arct}(x) - \int_0^x f(t)\,dt$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

ب - تحقق أن

للكل x من $]0;+\infty[$:

لدينا

$\forall x\in]0;+\infty[; h(x)=x^2g'(x)$

يعني أ ج

$h(x)=\arctan(x)-\int_0^x f(t)\,dt$

$h'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{\text{Arctan}(x)}{x}$

إ ن ج

$x\,h'(x)=\frac{x}{1+x^2}-\text{Arctan}(x)$

ج - استنتج أن $g'(x)<0$ للكل x من $]0;+\infty[$

ثم ضع جدول تغيرات g :

لدينا حسب السؤال 3 - أ -

$\forall x\in]0;+\infty[; \text{Arctan}(x)\geq\frac{x}{1+x^2}$

إ ن ج $\quad \frac{x}{1+x^2}-\text{Arctan}(x)\leq 0$

يعني أ ج $\quad \forall x\in\mathbb{R}_*^+ ; x\,h'(x)\leq 0$

إ ن ج $\quad \forall x\in\mathbb{R}_*^+ ; h'(x)\leq 0$

ولدينا $h(0)=0^2\times g'(0)=0$

x	0	$+\infty$
h(x)	0	↘

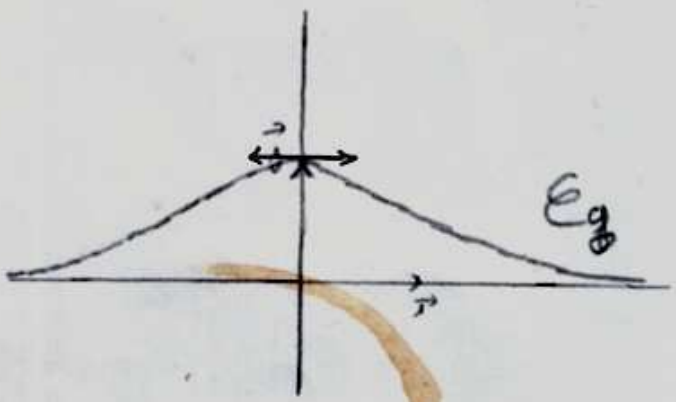
إ ن ج $\quad \forall x\in\mathbb{R}_*^+ \; h(x)<0$

ولدينا $\forall x\in\mathbb{R}_*^+ ; h(x)=x^2g'(x)$

إ ن ج $\quad \forall x\in\mathbb{R}_*^+ \; g'(x)<0$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
g(x)	0	↗		↘ 0

⑤ رسم المنحنى :



⑥ أ. بين أن $\forall x\in\mathbb{R}_*^+ ; f(x)\leq g(x)\leq 1$

لدينا حسب السؤال 3 - أ - الجزء (1) : $x>0$

$\frac{\text{Arctan}(t)}{t}\geq\frac{1}{1+t^2} ; t\in[0;x]$

$\int_0^x\frac{\text{Arctan}(t)}{t}dt\geq\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt ; t\in[0;x]$

يعني أ ج $\quad \int_0^x\frac{\text{Arctan}(t)}{t}dt\geq\text{Arctan}(x)$

إ ن ج $\quad \frac{1}{x}\int_0^x\frac{\text{Arctan}(t)}{t}dt\geq\frac{\text{Arctan}(x)}{x} ; x>0$

$\forall x>0 ; g(x)\geq f(x)$ $\Leftarrow$

ولدينا انطلاقا من جدول تغيرات g :

$\forall x\in\mathbb{R}_*^+ ; g(x)<1$

إ ن ج $\quad \forall x\in\mathbb{R}_*^+ \; f(x)\leq g(x)\leq 1$

ب - استنتج أن : $0<x ; |g'(x)|\leq\frac{1}{x}(1-f(x))$

لدينا حسب 4 - أ -

$\forall x\in]0;+\infty[; g'(x)=\frac{1}{x}(f(x)-g(x))$

$\forall x>0 ; |g'(x)|=\frac{1}{x}|f(x)-g(x)|$

ولدينا حسب السؤال السابق $\forall x\in\mathbb{R}_*^+ \; f(x)\leq g(x)$

إ ن ج $\quad \forall x>0 ; |g'(x)|=\frac{1}{x}(g(x)-f(x))$

ولدينا أيضا حسب السؤال السابق $g(x)\leq 1 \; (\forall x>0)$

إ ن ج $\quad \frac{1}{x}(g(x)-f(x))\leq\frac{1}{x}(1-f(x)) ; \forall x>0$

إ ن ج $\quad \forall x\in\mathbb{R}_*^+ \; |g'(x)|\leq\frac{1}{x}(1-f(x))$

ج - تحقق أن :

$\forall x\in\mathbb{R}^* : \frac{1}{x}(1-f(x))=\frac{1}{x^2}\int_0^x\frac{t^2}{1+t^2}dt$

لدينا $\frac{1}{x^2}\int_0^x\frac{t^2}{1+t^2}dt=\frac{1}{x^2}\left(\int_0^x 1-\frac{1}{1+t^2}dt\right)$

$=\frac{1}{x^2}\left[t-\text{Arctan}(t)\right]_0^x=\frac{1}{x}-\frac{\text{Arctan}(x)}{x^2}$

إ ن ج $\quad \forall x\in\mathbb{R}^* : \frac{1}{x}(1-f(x))=\frac{1}{x^2}\int_0^x\frac{t^2}{1+t^2}dt$

ج ك $\quad \frac{1}{x}(1-f(x))=\frac{1}{x}\left(1-\frac{\text{Arctan}(x)}{x}\right)$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

ج - أ - بين أن : $\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad 0 < \frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2}$

لدينا $\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad (t-1)^2 \geq 0 \Rightarrow t^2+1 \geq 2t$

إذن $\frac{1}{t^2+1} \leq \frac{1}{2t} \Rightarrow \frac{t}{t^2+1} \leq \frac{1}{2}$

ونعلم أن $\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad \frac{t}{1+t^2} \geq 0$

إذن $\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad 0 < \frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2}$

ب - استنتج أن $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad |g'(x)| \leq \frac{1}{4}$

ليكن x من $\mathbb{R}_+^*$:

انطلاقا من 1.ب و 2 - 1 نستنتج أن

$|g'(x)| \leq \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt$

ولدينا حسب السؤال السابق :

$\forall t \in [0;x] \quad 0 \leq \frac{t^2}{1+t^2} \leq \frac{1}{2} t$

$t \in [0;x] \; ; \; \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt \leq \frac{1}{2} \int_0^x t\,dt$

إذن $\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt \leq \frac{1}{4} x^2$

يعني أن $\frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt \leq \frac{1}{4}$

إذن $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad |g'(x)| \leq \frac{1}{4}$

3 - بين أن $g(x) = x$ تقبل حلا وحيدا في $[0;1]$

نضع $h(x) = g(x) - x$

h قابلة للاشتقاق على $]0;1[$ و $\forall x \in]0;1[\quad h'(x) = g'(x) - 1 < 0$ إذن h متناقصة قطعا على $[0;1]$

ولدينا $h(0) = 1$ و $h(1) = g(1) - 1$

ولدينا $\forall x \in [0;1] \quad g(x) \leq 1$

إذن $h(1) = g(1) - 1 \leq 0$

إذن $h(0) \times h(1) \leq 0$ و h متصلة على $[0;1]$ و رتيبة قطعا على $[0;1]$

إذن $\exists ! \alpha \in [0;1] \; ; \; g(\alpha) = \alpha$

د) أ - بين أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_n \leq 1$

من أجل $n=0$ لدينا $0 \leq u_0 = 0 \leq 1$; $\forall$

نفترض أنه $0 \leq u_n \leq 1$ ولنبين أن $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

لدينا $0 \leq u_n \leq 1$ و g متصلة و تناقصية على $[0;1]$

إذن $g(0) \geq g(u_n) \geq g(1)$

إذن $0 \leq u_{n+1} \leq 1$ ✓

إذن حسب البرهان بالترجع فإن $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; 0 \leq u_n \leq 1$

ب - بين أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$

لدينا $0 \leq u_n \leq 1$ و g متصلة على $[0;1]$ و ق. الاشتقاق عليه و $\alpha \in [0;1] \; g(\alpha) = \alpha$

إذن بتطبيق TAF على مجال طرفاه α و u_n نجد أن $|g(u_n) - g(\alpha)| = |g'(c)| |u_n - \alpha|$

حيث أن $c \in]0;1[$

ونعلم أن $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad |g'(x)| \leq \frac{1}{4}$

إذن $c \in]0;1[\quad |g'(c)| \leq \frac{1}{4}$

إذن $\forall n \in \mathbb{N} ; \; |g'(c)| |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$

ولدينا $\forall n \in \mathbb{N} ; \; |g(u_n) - g(\alpha)| = |g'(c)| |u_n - \alpha|$

إذن $\forall n \in \mathbb{N} ; \; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$

ج - استنتج نهاية u_n وبين أن u_n متقاربة

لنبين أولا أن $\forall n \in \mathbb{N} ; \; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

من أجل $n=0$ لدينا $|u_0 - \alpha| \leq 1$

وهذا صحيح لأن $(\alpha ; u_0) \in [0;1]^2$

نفترض أن $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

ولنبين أن $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

لدينا $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

إذن $\frac{1}{4} |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

إذن $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

إذن حسب افتراض الترجع فإن $\forall n \in \mathbb{N} ; \; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

وبما أن $|\frac{1}{4}| \leq 1$; $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

فإن $\lim_{n \to +\infty} u_n - \alpha = 0$

$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha}$

إذن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية متقاربة.

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

أسئلة مستقلة

1 - حدد نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة كالتالي:

$$u_n = \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p$$

لدينا

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^p$$

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

حيث $f(x) = x^p$

f دالة متصلة و ق. للاشتقاق على $]0;1[$

إذن

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 x^p dx = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{p+1}$$

2 - ليكن z و z' من $\mathbb{C}$ بين أن

$$(1+|z|^2)(1+|z'|^2) \geq |z+z'|^2$$

لتعليم أن:

$$|z+z'| \leq |z| + |z'|$$

$$|z+z'|^2 \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|z\times z'|$$

ولدينا

$$(1+|z|^2)(1+|z'|^2) = 1 + |z|^2 + |z'|^2 + |z|^2|z'|^2$$

نعلم أن

$$(|zz'|-1)^2 \geq 0$$

إذن

$$|zz'|^2 + 1 \geq 2|z\cdot z'|$$

$$|z|^2 + |z'|^2 + 2|z\cdot z'| + |z|^2|z'|^2 + 1 + |z| + |z'| \geq |zz'|^2 + 1 + |z| + |z'|$$

إذن

$$|z+z'|^2 \leq (1+|z|^2)(1+|z'|^2)$$

3 - بين أنه إذا كان $|\beta|=1$ فإن

$$|1+\beta| \geq 1 \quad \text{أو} \quad |1+\beta^2| \geq 1$$

لدينا $|\beta|=1$ إذن $\beta = e^{i\theta}$ $\theta \in]-\pi;\pi]$

ولدينا $|1+\beta| = |1+e^{i\theta}| = |2\cos\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\theta}{2}}|$

إذن

$$|1+\beta| = 2|\cos\frac{\theta}{2}|$$

إذا كان $\theta \in \left[-\frac{2\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]$ أي أن $\frac{\theta}{2} \in \left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$

فإن $|\cos\frac{\theta}{2}| \geq \frac{1}{2}$ ومنه فإن $|1+\beta| \geq 1$

وإذا كان $\theta \notin \left[-\frac{2\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]$ فإن

$|\cos\theta| \geq \frac{1}{2}$ أي أن $\cos\theta \leq \frac{1}{2}$

ولدينا

$$|1+\beta^2| = |1+e^{2i\theta}|$$

$$|1+\beta^2| = |2\cos\theta\, e^{i\theta}| = 2|\cos\theta|$$

$\forall \theta \in]-\pi;-\frac{2\pi}{3}[\cup[\frac{2\pi}{3};\pi]$ ولدينا $|1+\beta^2| \geq 1$

إذن

خلاصة:

$|1+\beta| \geq 1$ أو $|1+\beta^2| \geq 1$ ← $|\beta| = 1$

من انجاز:

- مهدي بنكروم
- وليد حفيظ الدين

تحت إشراف الأستاذ العلائي

Talamid.ma : للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع