

التعريف 1

نضع $f(z) = \frac{z-1}{(z+1)^2}$ حيث $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$

1- أ - حدد b من $\mathbb{R}$ بحيث $f(ib) = -ib$

ب - استنتج حلول المعادلة $(E): f(z) = z$ في $\mathbb{C}$

2- نرسم z_0, z_1, z_2 حلول (E) حيث $\operatorname{Re} z_0 = 0$ و $\operatorname{Re} z_1 > \operatorname{Re} z_2$
 أ - تحقق أن $z_1 = -1 + e^{i\frac{4\pi}{3}}$ و $z_2 = -1 + e^{i\frac{2\pi}{3}}$
 ب - استنتج الشكل المتكافئ لـ z_1 و z_2

3- نضع $z = e^{i\alpha}$ حيث $0 < \alpha < \pi$

أ - بين أن $\overline{f(z)} = z \times f(z)$

ب - حدد α بحيث $f(z) + \overline{f(z)} = 0$

ج - أكتب $f(z)$ على شكل $r e^{i\varphi}$ حيث $r > 0$ و $\varphi \in \mathbb{R}$

4- حدد z بحيث $|z| = 1$ و $\operatorname{Re}(f(z)) = \frac{1}{2}$

التعريف 2

نضع $A = \{a + b e^{i\frac{2\pi}{3}} \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$

1- بين أن $e^{i\frac{4\pi}{3}} \in A$ واستنتج أن "x" قد د في A

2- بين أن $(A, +, \times)$ حلقة تبادلية وواحدية

3- أ - أثبت أن z يقبل مقلوبا في A و $|z| = 1$

ب - استنتج جميع عناصر A التي تقبل مقلوبا

التعريف 3

D_2 مجموعة الدوال القابلة للإشتقاق مرتين على $[0, \pi]$ والى تحقق

$x f''(x) - (x+1) f'(x) + f(x) = 0$

1- بين أن $(\cdot, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

2- بين أن $f \in D_2$ كذا كان $f'''(x) - f''(x) = 0$ فكل $f \in D_2$

3- أ - استنتج أن f يوجد a و b و c من $\mathbb{R}$ بحيث

$f(x) = a e^x + b x + c$

ب - بين أن $b = c$

ج - استنتج أن $\dim D_2 = 2$