

التمرين الأول

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E) \quad \frac{1}{2}Z^3 - (1+i)Z^2 + 2(1+i)Z - 4i = 0$

1) أ. تحقق أن العدد $Z_0 = 2i$ حلا للمعادلة (E)

ب. حدد الأعداد α, β بحيث يكون :

$$(E) \Leftrightarrow (Z - 2i) \left(\frac{1}{2}Z^2 + \alpha Z + \beta \right) = 0$$

2) في المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر النقط $A(1+i\sqrt{3})$ ، $B(1-i\sqrt{3})$ و $C(2i)$

أ. أحسب $\frac{Z_C}{Z_A}$ واستنتج طبيعة المثلث OAC محددًا قياسًا للزاوية $\widehat{(OA, OC)}$

ب. حدد d لحق النقطة D منتصف القطعة $[AC]$ وبين أن $\arg(d) \equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi]$

ج. استنتج قيمة كل من $\sin \frac{5\pi}{12}$ و $\cos \frac{5\pi}{12}$

3) نعتبر الدورانين $R_1 \left(A, -\frac{\pi}{2} \right)$ و $R_2 \left(A, \frac{\pi}{2} \right)$ ونضع $O' = R_1(O)$ ، $B' = R_2(B)$

أ. حدد $Z_{O'}$ لحق O' وبين أن لحق النقطة B' هو $b' = 1 + 2\sqrt{3} + i\sqrt{3}$

ب. لتكن I منتصف القطعة $[OB]$ بين أن (AI) ارتفاع للمثلث $AO'B'$

التمرين الثاني

ليكن p عددا أوليا أكبر من 3 و a عددا من $\mathbb{Z}$ بحيث $a^2 + 1 \equiv 0 [p]$

1) أ. بين أن $a^{p-1} \equiv 1 [p]$

ب. استنتج أن $p \equiv 1 [4]$

2) لتكن A مجموعة الأعداد الأولية والتي تكتب على الشكل $4k + 1$.

نفترض أن A مجموعة منتهية ونضع $n = \left(2 \prod_{p_k \in A} p_k \right)^2 + 1$

أ. بين أن العدد 3 لا يقسم العدد n (بتطبيق مبرهنة فيرما)

ب. بين أنه إذا كان p عددا أوليا يقسم العدد n فإن $p \equiv 1 [4]$

ج. استنتج أن المجموعة A غير منتهية

التمرين الثالث

ليكن n عددا طبيعيا بحيث $n \geq 3$.

نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على المجال $]0, \infty[$ بما يلي : $f_n(x) = x - n \ln x$

1) أ. أحسب النهايات التالية $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$

ب. أحسب المشتقة $f'_n(x)$ وضع جدول تغيرات الدالة f_n

2) بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلين U_n و V_n بحيث $0 < U_n < n < V_n$

3) أ. بين أن $1 < U_n < e$ ($\forall n \geq 3$)

ب. تحقق أن $f_n(U_{n+1}) = \ln U_{n+1}$ واستنتج أن $(U_n)_n$ متتالية تناقصية

ج. بين أن $e^{\frac{1}{n}} < U_n < e^{\frac{3}{n}}$ ($\forall n \geq 3$) وأستنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

4) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ وبين أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln V_n}{\ln n} = 1$ ثم حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln V_n}{\ln n}$

5) أ. بين أن $V_n > n \ln n$ ($\forall n \geq 3$)

ب. بين أن $f_n(n^2) = n f_2(n)$ ($\forall n \geq 3$) واستنتج أن $V_n < n^2$ ($\forall n \geq 3$)

(يمكن استعمال رتبة f_2 ونعطي $f_2(3) > 0$)

ج. استنتج أن $V_n \leq 2n \ln n$ ($\forall n \geq 3$)

د. بين أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{V_n}{n \ln n} = 1$