هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamidma

الدورة الثانية

مسألة 1:

لتكن h_n الدالة المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي:

$$\begin{cases} h_n(x) = x e^{-\frac{n}{x}} & ; x \neq 0 \\ h_n(0) = 0 \end{cases}$$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$

الجزء الأول:

1- أ- اتصال h_n على يمين 0:

لدينا $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} h_n(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x e^{-\frac{n}{x}}$

ونعلم أن $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(-\frac{n}{x}\right) = -\infty$

أي $\lim\limits_{\substack{X \to 0+}} e^{-\frac{n}{x}} = 0$

فإن $\lim\limits_{x \to 0+} h_n(x) = 0 = h_n(0)$

وهذا يعني أن الدالة h_n متصلة على يمين $x_0 = 0$.

ب- قابلية اشتقاق الدالة h_n على يمين $x = 0$:

لدينا $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{h_n(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0+} e^{-\frac{n}{x}}$

$= 0$

[حسب حل السؤال 1 الجزء أ من]

وعليه فإن الدالة h_n قابلة للاشتقاق على يمين $x = 0$ و $(h_n)'_d(0) = 0$.

2- أ- حساب المشتقة $h_n'(x)$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$:

لدينا $h_n'(x) = \left(x e^{-\frac{n}{x}}\right)'$

$= e^{-\frac{n}{x}} + x \times \left(-\frac{n}{x^2}\right) e^{-\frac{n}{x}}$

$= e^{-\frac{n}{x}} + \frac{n}{x} e^{-\frac{n}{x}}$

$$h_n'(x) = \left(1 + \frac{n}{x}\right) e^{-\frac{n}{x}} \quad ; \quad x \in]0,+\infty[$$

ب- دراسة تغيرات الدالة h_n وجدول تغيراتها:

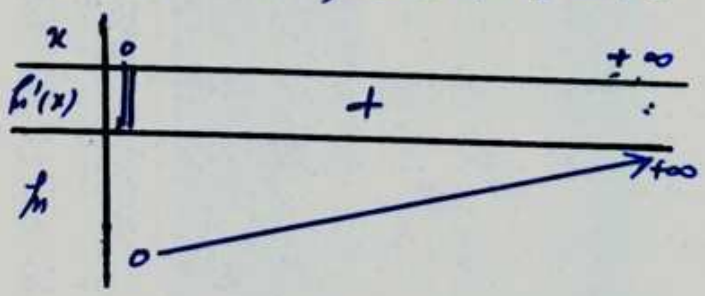
لدينا: $(\forall x > 0)$: $e^{-\frac{n}{x}} > 0$

و $1 + \frac{n}{x} > 0$

أي أن $h_n'(x) > 0$

وهذا يعني أن h_n دالة تزايدية قطعاً على $]0,+\infty[$.

وبالتالي فجدول تغيراتها كالتالي:



3) أ- دراسة الفرع اللانهائي لـ (C_n):

لدينا $\lim\limits_{+\infty} h_n(x) = \lim\limits_{+\infty} x e^{-\frac{n}{x}}$

ونعلم أن $\lim\limits_{+\infty} -\frac{n}{x} = 0$

والدالة $x \to e^x$ متصلة في 0

فإن $\lim\limits_{+\infty} e^{-\frac{n}{x}} = e^0 = 1$

و $\lim\limits_{+\infty} x = +\infty$

ومنه يكون لدينا $\lim\limits_{+\infty} h_n(x) = +\infty$

ولدينا $\lim\limits_{+\infty} \frac{h_n(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\frac{n}{x}}$

$= 1$

[حسب ما سبق]

ولدينا أيضاً: $\lim\limits_{x \to +\infty} h_n(x) - x$

$= \lim\limits_{+\infty} x\left(e^{-\frac{n}{x}} - 1\right)$

$= \lim\limits_{+\infty} -n \left(\frac{e^{-\frac{n}{x}} - 1}{-\frac{n}{x}}\right)$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

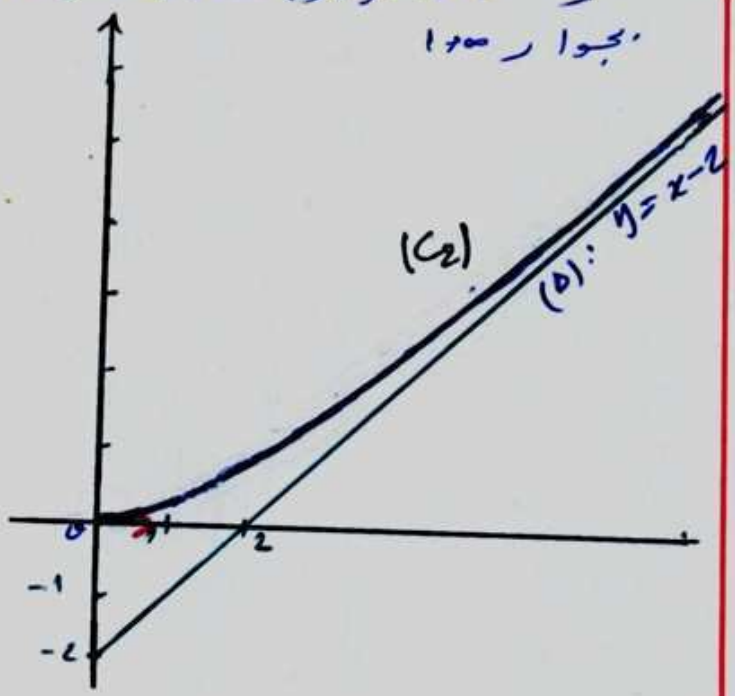
$\lim_{x\to+\infty} h_2(x) - x = -2$ } إذن

بمعنى أن: $(D): y = x - 2$ مقارب مائل لـ (C_2) بجوار $+\infty$.

ب- منحنى الدالة h_2:

لدينا: $h_2'(x) = e^{-\frac{2}{x}}\left(1 + \frac{2}{x}\right)$

و $(D): y = x - 2$ مقارب مائل لـ (C_2) بجوار $+\infty$.



II- الجزء الثاني

1- أ- المعادلة $h_n(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا u_n:

الدالة h_n متصلة على $]0, +\infty[$ وتزايدية قطعا على هذا المجال إذن فهي تقابل من $]0, +\infty[$ نحو $\mathbb{R}$.

وبما أن $1 \in \mathbb{R}$ فإن:

$(\exists! u_n \in]0, +\infty[) : h_n(u_n) = 1$

وهذا هو المطلوب.

(suite) $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n > 2$

لدينا $u_n > 2 \Leftrightarrow h_n(u_n) > h_n(2)$

[لأن الدالة h_n تزايدية]

$\Leftrightarrow 2 > e^{-n}$

$\Leftrightarrow e^n > 1$

وبما أن العبارة الأخيرة صحيحة فكل ما سبقها صحيح.

$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \boxed{u_n > 1}$

ب- 2) تبيان أن (u_n) تناقصية:

$h_n(u_{n+1}) = e^{\frac{n}{u_{n+1}}}$

لدينا $h_n(u_{n+1}) = u_{n+1}\, e^{-\frac{n}{u_{n+1}}}$

ومنه جهة ثانية لدينا:

$h_{n+1}(u_{n+1}) = 1 \Leftrightarrow u_{n+1}\, e^{-\frac{n+1}{u_{n+1}}} = 1$

$\Leftrightarrow u_{n+1} = e^{\frac{n+1}{u_{n+1}}}$

وهذا $h_n(u_{n+1}) = e^{\frac{n+1}{u_{n+1}}} \times e^{-\frac{n}{u_{n+1}}}$

وعليه فإن $\boxed{h_n(u_{n+1}) = e^{\frac{1}{u_{n+1}}}}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

ب- استنتاج رتابة المتتالية (u_n):

لدينا $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n > 1$

$\Leftarrow \frac{1}{u_{n+1}} > 0$

أي أن $e^{\frac{1}{u_{n+1}}} > 1$

ومنه $h_n(u_{n+1}) > h_n(u_n)$

وبما أن h_n تزايدية قطعا على $]0, +\infty[$.

فإن: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_{n+1} > u_n$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

وبالتالي فإن (y_n) متزايدة.

3) - 2) - نبين أن، $y_n \ln y_n = n$

لدينا $\ln(y_n) = 1 \Leftrightarrow y_n e^{-\frac{n}{y_n}} = 1$

$\Leftrightarrow y_n = e^{\frac{n}{y_n}}$

$\Leftrightarrow \ln y_n = \frac{n}{y_n}$

إذن! $\boxed{y_n \ln y_n = n}$

ب - نبين أن، $g(x) = x \ln x$ تقابل من $[1, +\infty[$ نحو مجال يتم تحديده:

لدينا: $x \to \ln x$ متصلة على $[1, +\infty[$

و $x \to x$ متصلة على $[1, +\infty[$

إذن، $x \xrightarrow{g} x \ln x$ متصلة على $[1, +\infty[$

و $g'(x) = \ln x + 1$

بما أن، $x \geq 1$

$\ln x \geq 0$

أي: $g'(x) \geq 1 > 0$

وهذا يعني أن g متزايدة قطعاً على $[1, +\infty[$.

إذن، g تقابل من $[1, +\infty[$ نحو المجال I بحيث:

$I = g([1, +\infty[) = [g(1), \lim_{+\infty} g[$

$= [0, +\infty[$

• تحديد $(y_n)_n$:

لدينا، $g(y_n) = n$

ومنه، $y_n = g^{-1}(n)$

وبما أن g^{-1} تقابل من $[0, +\infty[$ نحو $[1, +\infty[$

فإن، $\lim_{+\infty} g^{-1}(x) = +\infty$

و نكتب $y_n = g^{-1}(n)$ (نعتبر هذا الناتج)

(Raca) $\ln y_n + \ln \ln y_n = \ln n$

لدينا حسب السؤال (3) الجزء (1) صنف:

$y_n \ln y_n = n$

ومنه:

$\ln(y_n \ln y_n) = \ln n$

أي أن $\boxed{\ln y_n + \ln(\ln y_n) = \ln n}$

وذلك لكل n من $\mathbb{N}^*$.

ب - استنتاج النهاية: $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln y_n}{\ln n}$:

لدينا $\ln y_n + \ln(\ln y_n) = \ln n$

$\Leftrightarrow \frac{\ln y_n}{\ln n} + \frac{\ln(\ln y_n)}{\ln y_n} \times \frac{\ln y_n}{\ln n} = 1$

وعليه: $\frac{\ln y_n}{\ln n}\left(1 + \frac{\ln \ln y_n}{\ln y_n}\right) = 1$

أي أن $\frac{\ln y_n}{\ln n} = \frac{1}{1 + \frac{\ln(\ln y_n)}{\ln y_n}}$

وبما أن $y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

فإن $\ln y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

وعليه $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(\ln y_n)}{\ln y_n} = 0$

و بالتالي فإن $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln y_n}{\ln n} = 1}$

(5) نعتبر $I_n = \int_{y_n}^{y_{n+1}} \frac{dt}{\ln t}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$ و نضع $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} I_n$:

أ - نبين أن $\frac{1}{e^{\frac{1}{y_{n+1}}}} \leq \frac{I_n}{y_{n+1} - y_n} \leq 1$:

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا $u_n \leq u_{n+1}$

ولكل t من $[u_n, u_{n+1}]$:

$u_n \leq t \leq u_{n+1}$

و الدالة h تزايدية :

إذن

$h(u_n) \leq h(t) \leq h(u_{n+1})$

أي $1 \leq h(t) \leq e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$

وعليه $\int_{u_n}^{u_{n+1}} dt \leq I_n \leq e^{\frac{1}{u_{n+1}}} \int_{u_n}^{u_{n+1}} dt$

$[t]_{u_n}^{u_{n+1}} \leq I_n \leq e^{\frac{1}{u_{n+1}}} \cdot [t]_{u_n}^{u_{n+1}}$

$u_{n+1} - u_n \leq I_n \leq (u_{n+1} - u_n) e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$

إذن

$$1 \leq \frac{I_n}{u_{n+1} - u_n} \leq e^{\frac{1}{u_{n+1}}} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

مع العلم أن $u_{n+1} - u_n > 0$.

وبما أن $u_{n+n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

فإن $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{u_{n+1}} = 0$

و $x \mapsto e^x$ متصلة في 0.

$\lim_{n \to +\infty} e^{\frac{1}{u_{n+1}}} = e^0 = 1$ ومنه

وهذا يعني أن

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{I_n}{u_{n+1} - u_n} = 1$$

ب- حساب النهاية $\lim_{n \to +\infty} S_n$

لدينا : $(n \in \mathbb{N}^*)$: $I_n \geq u_{n+1} - u_n$

ومنه $I_k \geq u_{k+1} - u_k$

إذن $\sum_{k=1}^{n} I_k \geq \sum_{k=1}^{n} (u_{k+1} - u_k)$

$S_n \geq u_{n+1} - u_1$

وحيث أن $\lim_{n \to +\infty} (u_{n+1} - u_1) = +\infty$

فإن $\{\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty\}$

الجزء الثالث

لتكن F الدالة المعرفة بـ :

$$\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} h_2(t)\,dt & ; x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

1) أ- نبين أن : $(\forall t \in \mathbb{R}^*) : 0 < e^{-\frac{2}{t}} < 1$

بما أن $e^{\frac{-2}{t}} > 0$ فإن $e^{-\frac{2}{t}} > 0$

بمعنى أن $e^{-\frac{2}{t}} < 1$

لكل t من $\mathbb{R}^*$.

ولدينا

$\Leftrightarrow \frac{-2}{t} < 0 \quad [t > 0]$

$\Leftrightarrow -2 < 0$

جملة صحيحة.

ومنه لكل t من $\mathbb{R}^*$: $\boxed{0 < e^{-\frac{2}{t}} < 1}$

ب- اتصال F وقابلية اشتقاق F على $\mathbb{R}$:

لدينا $0 < e^{-\frac{2}{t}} < 1$

$\forall t \in [x, 2x]$

ومنه $0 < t e^{-\frac{2}{t}} \leq 2x$

إذن $\left\{\begin{array}{l} x \leq 2x \\ x \geq 0 \end{array}\right.$: $0 < F(x) < \int_x^{2x} 2x\,dt$

$(\forall x > 0) : \{0 < F(x) < 2x^2\}$ (*)

وبما أن $\lim_{x \to 0^+} 2x^2 = 0$

فإن $\lim_{x \to 0^+} F(x) = 0 = F(0)$

أي أن F متصلة على يمين 0.

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

ومنه العلاقة (*) تجعل أن:

$(\forall x>0)$: $0 < \frac{F(x)}{x} < 2x$

وحيث أن $\lim_{x\to 0^+} 2x = 0$

فإن $\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{x} = 0$

← ومنه فإن F قابلة للإشتقاق على يمين 0 و $F'_d(0) = 0$.

ج- نبين أن $(\forall t\in\mathbb{R}) : e^t \geq t+1$

لتكن h الدالة بحيث:

$(\forall t\in\mathbb{R}) : h(t) = e^t - t - 1$

h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و:

$h'(t) = e^t - 1$

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(t)$		$-$	0	$+$	
h	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

نلاحظ أن 0 قيمة دنيا مطلقة للدالة h

ومنه $(\forall t\in\mathbb{R}) : h(t) \geq 0$

أي أن: $e^t \geq t+1$ $(\forall t\in\mathbb{R})$

ومنه النتيجة.

ب- نبين أن $(\forall x>0) : F(x) \geq -2x + \frac{3}{2}x^2$

لدينا $(\forall t\in\mathbb{R}) : e^t \geq t+1$

ومنه $e^{-\frac{2}{t}} \geq -\frac{2}{t} + 1$

أي أن $t + e^{-\frac{2}{t}} \geq -2 + t$ [تحقق من ذلك]

فبالتكامل على $[x, 2x]$ (لأن $x>0$) نجد $F(x) \geq \int_x^{2x} (-2+t)\,dt$

$F(x) \geq \left[-2t + \frac{t^2}{2}\right]_x^{2x}$

بعد الحساب نجد أن:

$\boxed{(\forall x>0) : F(x) \geq -2x + \frac{3}{2}x^2}$

وبما أن $\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{2}x^2 - 2x = +\infty$

فإن $\{\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty\}$

ج- دراسة الفرع اللانهائي لـ C_F بجوار $+\infty$

لدينا $\lim_{+\infty} F(x) = +\infty$

و لدينا $(\forall x>0) : F(x) \geq -2x + \frac{3}{2}x^2$

$\in$ $\frac{F(x)}{x} \geq -2 + \frac{3}{2}x$

وحيث أن $\lim_{+\infty} \frac{3}{2}x = +\infty$

فإن $\{\lim_{+\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty\}$

نعني أن C_F يقبل محور الأراتيب كاتجاه متقارب.

3- أ- نبين أن F قابلة للإشتقاق على المجال $]0,+\infty[$:

لدينا $t \to -\frac{2}{t}$ متصلة على $]0,+\infty[$.

وبما أن $t \to e^t$ متصلة على $\mathbb{R}$

فإن $t \to e^{-\frac{2}{t}}$ متصلة على $]0,+\infty[$

و $t \to t$ متصلة على $]0,+\infty[$

$\in$ $t \to t e^{-\frac{2}{t}}$ متصلة على $]0,+\infty[$

إذن G تقبل دالة أصلية G معرفة على $]0,+\infty[$.

ومنه $F(x) = G(2x) - G(x)$

بما أن $x \xrightarrow{v} 2x$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$

و $v(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}_+^*$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع: Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

و $H(x) \to x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$

كما أن $H(2x)$ $\xrightarrow{\text{مركب}}$ x قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$.

و منه فإن الدالة F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$.

و $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$:

$$F'(x) = (2x)' h'(2x) - h'(x)$$
$$= 2 h_2(2x) - h_2(x)$$
$$= 2 \times 2x e^{-\frac{1}{2x}} - x e^{-\frac{2}{x}}$$
$$= x\left(4e^{\frac{1}{2x}} - 1\right) e^{-\frac{2}{x}}$$

و بالتالي فإن لكل x من $\mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{F'(x) = \left(4e^{\frac{1}{2x}} - 1\right) h_2(x)}$$

إشارة F' من إشارة الدالة h_2 لأن $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$: $e^{-\frac{2}{x}} > 0$

و لدينا $x > 0$ فإن $h_2(x) > 0$

و لدينا $\frac{1}{x} > 0$

و لدينا $e^{\frac{1}{x}} > 1$

$4e^{\frac{1}{x}} - 1 > 3 > 0$

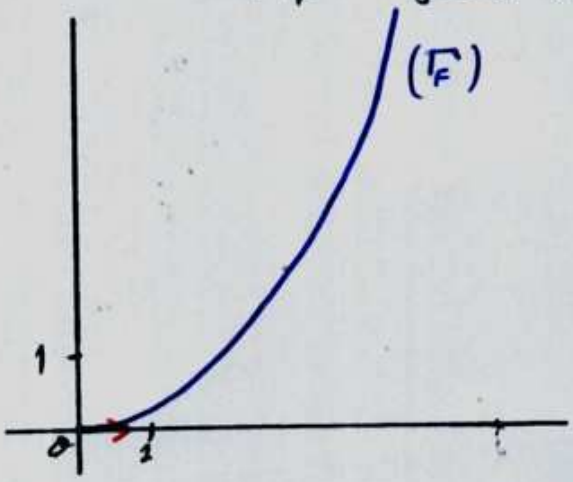
و عليه $(4e^{\frac{1}{x}} - 1) h_2(x) = F'(x) > 0$

إذن F تزايدية قطعاً.

و منه نجد جدول تغيرات كالتالي :

x	0	$+\infty$
$F(x)$	0	$+\infty$

ج) المنحنى $(\mathcal{C}_F)$:



5) أ- نبين أن :

$(\forall x > 0)$: $x^2 e^{-\frac{2}{x}} \leq F(x) \leq 2x^2 e^{-\frac{1}{x}}$

لدينا لكل $x \in \mathbb{R}_+^*$ $x < 2x$

و لكل $t \in [x, 2x]$:

$x \leq t \leq 2x$

و h_2 الدالة التزايدية

$h_2(x) \leq h_2(t) \leq h_2(2x)$

$x e^{-\frac{2}{x}} \int_x^{2x} dt \leq \int_x^{2x} h_2(t)\,dt \leq 2x e^{-\frac{1}{x}} \int_x^{2x} dt$

$x e^{-\frac{2}{x}} \cdot [t]_x^{2x} \leq F(x) \leq 2x e^{-\frac{1}{x}} \cdot [t]_x^{2x}$

$$\boxed{(\forall x > 0) \quad x^2 e^{-\frac{2}{x}} \leq F(x) \leq 2x^2 e^{-\frac{1}{x}}}$$

ب- نبين أن : $(\forall x > 0)$: $e^x \geq e.x$

حسب السؤال (2) الجزء (أ) منه لدينا

$(\forall t \in \mathbb{R})$: $e^t \geq t + 1$

و منه $e^{x-1} \geq x$

أي أن $e \cdot e^{x-1} \geq e.x$

و عليه $(\forall x > 0)$: $\{e^x \geq e.x\}$

نستنتج أن $F(\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}) < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

لدينا $F\left(\sqrt{\frac{e}{2}}\right) < e\,e^{-\sqrt{\frac{2}{e}}}$

[* حسب السؤال (3ب)] .

و حسب السؤال السابق لدينا :

$$e^{\sqrt{\frac{e}{2}}} \geq e\sqrt{\frac{2}{e}} = \sqrt{2e}$$

$$e^{-\sqrt{\frac{2}{e}}} \leq \frac{1}{\sqrt{2e}}$$

$$F\left(\sqrt{\frac{e}{2}}\right) < \frac{e}{\sqrt{2e}} = \sqrt{\frac{e}{2}}$$

و هذا هو المطلوب .

6 - أ - نبين أن : $(\forall x \geq 4)$: $F(x) \geq x$

لدينا $t \geq x \geq 4$

و h_2 دالة تزايدية ،

و منه $h_2(t) \geq h_2(4) = 1$

أي أن : $F(x) \geq \int_2^x dt$ $(x < 2x)$

$$F(x) \geq 2x - x$$

$$\{F(x) \geq x\} \quad (\forall x \geq 4)$$

ب - نستنتج أن :

$(\exists \alpha \in [\sqrt{\frac{e}{2}}, 4])$: $\alpha = \int_{\alpha}^{2\alpha} h_2(t)\,dt$

نعتبر الدالة : $\Phi(x) = F(x) - x$

حيث x متغير من $[\sqrt{\frac{e}{2}}, 4]$.

بما أن F متصلة على $[\sqrt{\frac{e}{2}}, 4]$

فإن Φ متصلة على $[\sqrt{\frac{e}{2}}, 4]$

و لدينا $\Phi\left(\sqrt{\frac{e}{2}}\right) = F\left(\sqrt{\frac{e}{2}}\right) - \sqrt{\frac{e}{2}} < 0$

$\Phi(4) = F(4) - 4 > 0$

$\Phi\left(\sqrt{\frac{e}{2}}\right) \cdot \Phi(4) < 0$ إذن

نحسب مبرهنة القيم الوسطية :

$(\exists \alpha \in [\sqrt{\frac{e}{2}}, 4])$: $\Phi(\alpha) = 0$

أي أن : $\boxed{(\exists \alpha \in [\sqrt{\frac{e}{2}}, 4])\ F(\alpha) = \alpha}$

و منه النتيجة .

انتهى الموضوع

من اقتراح التلميذ
حسني الدريسي
تحت
إشراف :
ذ - الهاشمي

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma