هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

التمرين II

التمرين II: ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$.

① لنبين أن: $(\forall x \in \mathbb{R})$: $\sin x^{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \sin x \cos^{2k} x$

لدينا: $\sin^{2n+1} x = \sin x (\sin^2 x)^n$

$= \sin x (1 - \cos^2 x)^n$

$= \sin x \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-\cos^2 x)^k$

$= \sin x \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \cos^{2k} x$

وبالتالي:

$(\forall x \in \mathbb{R})$ $\boxed{\sin^{2n+1} x = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \sin x \cos^{2k} x}$

② حساب التكامل I_k نكتب:

لدينا:

$$I_k = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin t \cos^{2k} t \, dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} -\cos' t \cdot \cos^{2k} t \, dt$$

$$= \left[-\frac{\cos^{2k+1} t}{2k+1} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{x}$$

$$= \frac{-\cos^{2k+1} x}{2k+1}$$

وعليه فإن:

$(\forall x \in \mathbb{N})$; $\boxed{I_k = \frac{-\cos^{2k+1} x}{2k+1}}$

③ استنتاج التكامل العقدي I:

لدينا: $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin^{2n+1} t \, dt$

وحسب السؤال السابق ③

فإن:

$(\forall t \in \mathbb{R})$; $\sin^{2n+1} t = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \sin x \cos^{2k} x$

وبالتالي:

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin^{2n+1} t \, dt = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin t \cos^{2k} t \, dt$$

وحسب السؤال (2) نجد أن:

$$I = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \frac{-\cos^{2k+1} x}{2k+1}$$

إذن:

$$\boxed{I = -\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k (-1)^k}{2k+1} \cos^{2k+1} x}$$

التمرين I

ليكن n من $\mathbb{N}^*$. نضع:

$$\begin{cases} y_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \, dx \\ y_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} \, dx \end{cases}$$

① حساب y_0:

لدينا:

$$y_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \, dx$$

$$= \int_0^1 (\arctan x)' \, dx$$

$$= [\arctan x]_0^1$$

$$\boxed{y_0 = \frac{\pi}{4}}$$

② نبين أن: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $y_{n+1} + y_n = \frac{1}{2n+1}$

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}^*$.

لدينا:

$$y_{n+1} + y_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{2n+2} + x^{2n}}{1+x^2} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{2n}(1+x^2)}{(1+x^2)} dx$$

$$= \int_0^1 x^{2n} \, dx$$

$$= \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^1$$

وعليه فإن: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\boxed{y_{n+1} + y_n = \frac{1}{2n+1}}$

المزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

$V_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ حيث

أ- نبين أن:

$(\forall n \in \mathbb{N}) : \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} = \frac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}$

لدينا:

$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} = 1 - x^2 + x^{2\cdot 2} + \cdots + (-1)^n \cdot x^{2n}$

$= \frac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1-(-x^2)}$

$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} = \frac{1+(-1)^n \cdot x^{2n+2}}{1+x^2}$; $n \in \mathbb{N}$

ب- تقارب المتتالية $(V_n)_n$ ونهايتها:

لدينا:

$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} = \frac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}$

ومنه: $\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k}\, dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^1 (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\, dx$

$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \cdot U_{n+1}$

$\int_0^1 x^{4k}\, dx = \left[\frac{x^{4k+1}}{2k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2k+1}$ مع العلم أن

وعليه:

$V_n = \frac{\pi}{4} + (-1)^n U_{n+1}$

$= \frac{\pi}{4} + (-1)^n U_{n+1}$

حيث $0 < U_{n+1} \leq \frac{1}{2n+3}$

وحاليا: $\lim_{n \to +\infty} U_{n+1} = 0$

وعليه فإن $(V_n)_n$ متقاربة و:

$\lim_{n \to +\infty} V_n = \frac{\pi}{4}$

تمرين 4:

حسب المتتجة السابقة:

$U_2 + U_4 = \frac{1}{2 \times 0 + 1}$

أي أن:

$U_4 = \frac{1}{1} - U_2$

$U_4 = 1 - \frac{\pi}{4}$

و إذن:

و

$U_4 + U_6 = \frac{1}{2 \times 1 + 1}$

بمعنى أن:

$U_6 = \frac{1}{3} - U_4$

$= \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4}$

$U_6 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$

وبالتالي:

ب) نبين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < U_n < \frac{1}{2n+1}$

$(\forall x \in]0,1])$

$1 + x > 1$

و

$x^{2n} > 0$

$\Leftarrow \frac{x^{2n}}{1+x} > 0$

أي: $\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\, dx > 0$

وعليه $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $U_n > 0$

ومنه نستنتج أن:

$U_{n+1} > 0$

أي: $U_n + U_{n+1} > U_n$

وعليه: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $U_n < \frac{1}{2n+1}$

من العلاقتين ① و ② يكون

لدينا:

$(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $0 < U_n < \frac{1}{2n+1}$

وحاليا: $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$

إذن: $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

التمرين III

(I) ندرس f الدالة العددية:

$$f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$$

1) أ- حساب النهايات المطلوبة:

لدينا $\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} \frac{e^x}{1+x^2}$

$$= \lim_{+\infty} \frac{\frac{e^x}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+1}$$

$$= +\infty$$

$\left[\lim_{+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty \text{ لأن}\right]$

ولدينا

$$\lim_{-\infty} \frac{e^x}{1+x^2} = 0$$

$\left[\lim_{-\infty} e^x = 0 \text{ لأن}\right.$ و $\left.\lim_{-\infty} 1+x^2 = +\infty\right]$

ب - البرهان الانتمائي بجوار $+\infty$:

لدينا $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$

ولدينا $\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty} \frac{e^x}{(x+1)x}$

يعني $= \lim_{+\infty} \frac{e^x}{x^2+x}$

إذن $= \lim_{+\infty} \frac{\frac{e^x}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}$

وعليه $= +\infty$

$\left[\lim_{+\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty \text{ لأن}\right]$

إذن (C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $+\infty$.

2 - حساب $f'(x)$ ودراسة تغيرات الدالة f:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

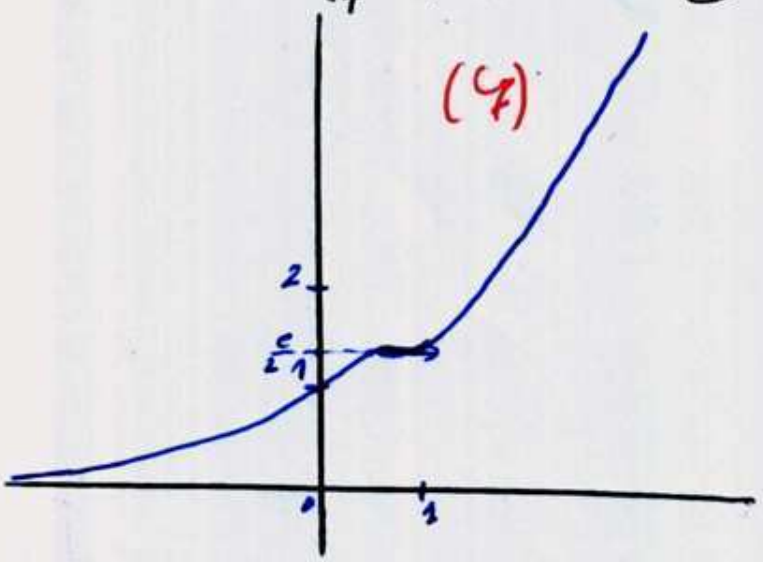
و $f'(x) = \frac{(1+x^2)e^x - 2xe^x}{(1+x^2)^2}$ $(\forall x \in \mathbb{R})$

$$= \frac{e^x + x^2e^x - 2xe^x}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{e^x(x-1)^2}{(1+x^2)^2} \geq 0$$

إذن f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

3) منحنى الدالة f:



(II) نعرف الدالة F المستمر الوحيد x بحيث $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

1) أ- نبين أن: $(\forall x \geq 0)(\forall t \in [0,x]) ; f(t) \geq \frac{e^t}{1+x^2}$

$(\forall t \in [0,x]) ; 1+t^2 \leq 1+x^2$

أي أن $\frac{1}{1+t^2} \geq \frac{1}{1+x^2}$

وعليه $\frac{e^t}{1+t^2} \geq \frac{e^t}{1+x^2}$

وعليه $\left\{f(t) \geq \frac{e^t}{1+x^2}\right\}$; $\left(\begin{matrix}\forall t \in [0,x] \\ x \geq 0\end{matrix}\right)$

ب - نستنتج أن:

$(\forall x \geq 0) : F(x) \geq f(x) - \frac{1}{2+x^2}$

حسب الجزء أ) من السؤال 1) لدينا

$\left(\begin{matrix}\forall t \in [0,x] \\ x \geq 0\end{matrix}\right) : f(t) \geq \frac{e^t}{1+x^2}$

وعليه $\int_0^x f(t)\,dt \geq \int_0^x \frac{e^t}{1+x^2}\,dt$ $(x \geq 0)$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

يعني أن:

$$F(x) \geq \frac{1}{1+x^2}\cdot[e^x]_0^x$$

$$F(x) \geq \frac{e^x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}$$

وعليه:

$$\forall x>0 \quad \left\{ F(x) \geq f(x) - \frac{1}{1+x^2} \right\}$$

ولدينا:

$$\begin{cases} \lim_{+\infty} f(x) = +\infty \\ \text{و} \\ \lim_{+\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0 \end{cases}$$

فإن:

$$\boxed{\lim_{+\infty} F(x) = +\infty}$$

ج - الفرع اللانهائي للمنحنى (Γ_f) عند $+\infty$:

لدينا: $\forall x>0 : F(x) \geq f(x) - \frac{1}{1+x^2}$

ومنه: $\frac{F(x)}{x} \geq \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x+x^3}$

وبما أن:

$$\begin{cases} \lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \\ \text{و} \\ \lim_{+\infty} \frac{1}{x^3+x} = 0 \end{cases}$$

فإن:

$$\lim_{+\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty$$

وهذا يعني أن (Γ_f) لدالة قبلت فرعا شلجميا باتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$.

د) رتابة الدالة F:

لدينا $f(t)$ دالة مستمرة على $\mathbb{R}$.

إذن فهي تقبل دالة أصلية Φ معرفة على $\mathbb{R}$.

$$F(x) = \Phi(x) - \Phi(0)$$

ولدينا $\Phi(x)$ دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

فإن F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

$$F'(x) = \Phi'(x) = f(x) > 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

ومنه F تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

$F(x) \geq \text{Arctg}\, x$ (1×4pt)

نعتبر أولا الدالة φ المعرفة كما يلي:

$$(\forall x \in]-\infty, 0[) : \varphi(x) = F(x) - \text{Arctg}\, x$$

لدينا φ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$.

و

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) : \varphi'(x) = F'(x) - \text{Arctg}'(x)$$

$$= f(x) - \frac{1}{1+x^2}$$

يعني:

$$\varphi'(x) = \frac{e^x - 1}{1+x^2}$$ (3×1pt)

وبما أن: $x<0$ أي $e^x<1$

فإن $\varphi'(x)<0$. وهذا يعني أن φ تناقصية قطعا على $]-\infty, 0[$.

ومنه

$$(\forall x \leq 0) \Rightarrow \varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$$

$$F(x) - \text{Arctg}\, x \geq 0$$

$$\boxed{F(x) \geq \text{Arctg}\, x} \quad (\forall x \leq 0)$$

ب - نقبل أن F لها نهاية ℓ عند $-\infty$ حيث $\ell < 0$. نبين أن $\ell \geq -\frac{\pi}{2}$

لدينا: $(\forall x \in \mathbb{R}^-) : f(x) > 0$

$$\Leftrightarrow \int_x^0 f(t)\,dt \leq 0 \quad (x \leq 0)$$

$$\boxed{F(x) \leq 0}$$ أي

إذن: $\text{Arctg}\, x \leq F(x) < 0$ $(\forall x \leq 0)$;

وعليه: $\lim_{-\infty} \text{Arctg}\, x \leq \lim_{-\infty} F(x) \leq 0$

إذن: $\lim_{-\infty} \text{Arctg}\, x \leq \ell \leq 0$

وبما أن: $\lim_{-\infty} \text{Arctg}\, x = -\frac{\pi}{2}$

[لأن $x \to -\infty$]

فإن:

$$\boxed{-\frac{\pi}{2} \leq \ell < 0}$$

وهذا هو المطلوب.

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma