

الثانية علوم رياضية	فرض رقم 1	2014-2013
التمرين (1) ليكن n عددا من $\mathbb{N}$ (1) بين أن : $\forall x \in \mathbb{R} : \sin^{2n+1} x = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k (-1)^k \sin x \cos^{2k} x$ (2) أحسب $I_k = \int_{\frac{\pi}{2}}^x \sin t \cos^{2k} t dt$ ($\forall k \in \mathbb{N}$) (3) استنتج التكامل : $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^x \sin^{2n+1} t dt$		
التمرين (2) ليكن n عدد طبيعي غير منعدم نضع $U_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ و $U_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx$ (1) أحسب U_0 (2) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) U_{n+1} + U_n = \frac{1}{2n+1}$ و استنتج قيمة كل من U_1 و U_2 (3) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) 0 < U_n < \frac{1}{2n+1}$ ثم حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ (4) نعتبر المتتالية $(V_n)_n$ المعرفة بما يلي : $V_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ أ. بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k x^{2k} = \frac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}$ ب. استنتج أن المتتالية $(V_n)_n$ متقاربة وأن $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \frac{\pi}{4}$		
التمرين (3) (I) نعتبر الدالة العددية f بحيث : $f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$ (1) أ. أحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ب. أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ (2) أحسب $f'(x)$ و أدرس منحنى تعبيرات الدالة f (3) أرسم المنحنى (C_f) (II) لتكن F الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ (1) أ. بين أن $(\forall x > 0) (\forall t \in [0, x]) f(t) \geq \frac{e^t}{1+x^2}$ ب. استنتج أن $(\forall x > 0) F(x) \geq f(x) - \frac{1}{1+x^2}$ ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ ج. أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (Γ_F) عند $+\infty$ (2) بين أن F تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$ (3) أ. بين أن $(\forall x < 0) F(x) \geq \arctan x$ ب. نقبل أن F تقبل نهاية l عند $-\infty$. بين أن $-\frac{\pi}{2} \leq l \leq 0$		