ليكن n عددا طبيعيا من $\mathbb{N}^*$. نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة بما يلي $f_n(x)=(1-x)^n e^{2x}$ و ليكن (C_n) منحنى الدالة f_n في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$ بحيث : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2\,cm$

(I) (1 بين أن $\lim_{x\to-\infty} f_n(x)=0$ و أحسب النهاية $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$

2) أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_n) عند $+\infty$

3) أحسب $f_n'(x)$ و أنجز جدول تغيرات كل من الدالتين f_1 و f_2

4) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) ; (C_2) و أرسمهما

(II) نعتبر الدالة F المعرفة على $]-\infty,0]$ بما يلي : $F(x)=\int_x^0 \frac{f_1(t)}{1+e^{2t}}dt$

1) أ- بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على $]-\infty,0]$ و أن $F'(x)=\frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$

ب- أدرس منحى تغيرات الدالة F

2) أ- بين أن $(\forall x<0)\quad \frac{1}{2}\int_x^0 f_1(t)\,dt \le F(x) \le \frac{1}{1+e^{2x}}\int_x^0 f_1(t)\,dt$

ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن $\int_x^0 f_1(t)\,dt=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{3}{4}e^{2x}$

ج- نقبل أن $F(x)$ تقبل نهاية l عند $-\infty$ بين أن $\frac{3}{8}\le l\le\frac{3}{4}$

(III) نضع $U_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx$ لكل عددا طبيعيا n من $\mathbb{N}^*$

1) أ- بين أن $U_n>0\quad(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

ب- أدرس إشارة $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ على المجال $[0,1]$

ج- استنتج أن المتتالية $(U_n)_n$ تناقصية

2) أ- بين أن $U_{n+1}=-\frac{1}{2}+\frac{n+1}{2}U_n\quad(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

ب- استنتج ب cm^2 مساحة الحيز (Δ) المحصور بين المنحنيين (C_1) ; (C_2) و المستقيمين $x=0$; $x=1$

3) بين أن $\frac{1}{n+1}\le U_n\le\frac{1}{n-1}\quad(\forall n\ge 2)$ و حدد $\lim_{n\to+\infty} U_n$; $\lim_{n\to+\infty} nU_n$

4) ليكن a عددا حقيقيا موجبا و بحيث $a\neq U_1$.

نعتبر المتتالية $(V_n)_n$ المعرفة بما يلي :

$V_1=a$ و $V_{n+1}=-\frac{1}{2}+\frac{n+1}{2}V_n\quad(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ ثم نضع $d_n=|V_n-U_n|$

أ- بين أن $d_n=\frac{n!}{2^{n-1}}d_1\quad(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ و بين أن $\lim_{x\to+\infty} d_n=+\infty$

ب- بين أن المتتالية $(V_n)_n$ متباعدة

(IV) نضع $W_n=\frac{2^n}{n!}U_n$ لكل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}^*$

1) أ- بين أن $\frac{2^{n-1}}{n!}\le 1\quad(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

ب- بين أن $W_n\le\frac{2e^2}{n+1}\quad(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ و استنتج أن $\lim_{n\to+\infty} W_n=0$

2) أ- بين أن $W_{n+1}=-\frac{2^n}{(n+1)!}+W_n\quad(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

ب- أحسب مشتقة الدالة $x\to\left(\frac{3}{2}-x\right)e^{2x}$ و بين أن $W_1=\frac{1}{2}(e^2-3)$

ج- بين أن $W_n=\frac{1}{2}\left(e^2-\sum_{k=0}^{k=n}\frac{2^k}{k!}\right)\quad(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

د- استنتج النهاية $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{k=n}\frac{2^k}{k!}$