

د. صبيح الغرض الأول الأسد من III.

السنة الدراسية 2011 . 2010

الحزب . II

$$\forall x \in [-1, +\infty[$$

$$\frac{x}{3(x+2)} \leq \int_0^x \frac{t^2}{1+t} dt \leq \frac{x}{3}$$

إذا كان $x > 0$

$$0 < t < x$$

$$1 < t+1 < x+1$$

$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{t+1} < 1$$

$$\frac{t^2}{x+2} < \frac{t^2}{t+1} < t^2$$

$$\forall x > 0 \int_0^x \frac{t^2}{x+2} dt < \int_0^x \frac{t^2}{t+1} dt < \int_0^x t^2 dt$$

$$\frac{1}{x+2} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^x < \int_0^x \frac{t^2}{t+1} dt < \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^x$$

$$\frac{x^3}{3(x+2)} < \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{t+1} dt < \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{x}{3(x+2)} < \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{t+1} dt < \frac{x}{3}$$

إذا كان $x \in]-1, 0[$

$$x < t < 0$$

$$x+1 < t+1 < 1$$

$$1 < \frac{1}{t+1} \leq \frac{1}{x+2}$$

$$t^2 \leq \frac{t^2}{t+1} \leq \frac{t^2}{x+2}$$

$$\forall x \in]-1, 0[\quad x < 0$$

$$\int_x^0 t^2 dt \leq \int_x^0 \frac{t^2}{t+1} dt \leq \int_x^0 \frac{t^2}{x+2} dt$$

$$\left[\frac{t^3}{3} \right]_x^0 \leq \int_x^0 \frac{t^2}{t+1} dt \leq \frac{1}{x+2} \left[\frac{t^3}{3} \right]_x^0$$

تمرين (المسألة)

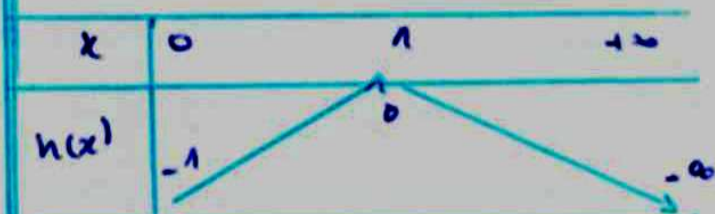
جزء II .

$$\frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t} dt = \frac{\ln(1+x) - x + \frac{1}{2}}{x^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t} dt &= \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2 - 1 + 1}{1+t} dt \\ &= \frac{1}{x^2} \int_0^x \left(t - 1 + \frac{1}{1+t} \right) dt \\ &= \frac{1}{x^2} \left[\frac{t^2}{2} - t + \ln(1+t) \right]_0^x \\ &= \frac{1}{x^2} \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) \right) \\ &= \frac{\ln(1+x) - x + \frac{1}{2}}{x^2} \end{aligned}$$

نضع الدالة $h(x) = x - 1 - x \ln x$

$$h'(x) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x$$



حسب جدول التغيرات

$$\begin{aligned} \forall x > 0 \quad h(x) &\leq h(1) \\ h(x) &\leq 0 \\ x - 1 - x \ln x &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - x}{x^2} = -\frac{1}{2} \quad \text{في}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)^2} = -\frac{1}{2} \quad \text{وبالتالي}$$

وبالتالي في حالة الاستقار

$$f'(1) = -\frac{1}{2} \quad \text{في 1 بحيث}$$

2- الموضع الانحائي لـ f

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{x}{x-1}$$

$$= 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{لان}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x-1} \cdot \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x-1} = -1, \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \quad \text{لان}$$

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x-1} \right)'$$

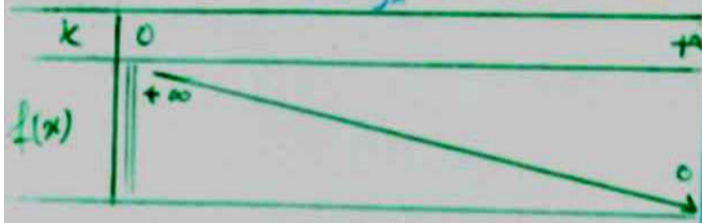
$$= \frac{\frac{1}{x}(x-1) - \ln x}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{x} - \ln x}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x - x \ln x - 1}{x(x-1)^2} = \frac{h(x)}{x(x-1)^2} \leq 0$$

$$\forall x > 0 \quad h(x) \leq 0 \quad \text{لان}$$

جدول التغيرات



$$\left(-\frac{x}{3} \right) \cdot \frac{1}{x^2} \leq -\frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t} dt \leq \frac{-x^3}{3(x+1)} \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{x}{3(x+1)} < \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t} dt < \frac{x}{3}$$

و عليه $\forall x \in]-1, +\infty[\setminus \{0\}$

$$\frac{x}{x+1} < \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t} dt < \frac{x}{3} \quad \text{لدينا}$$

لكن الدالة f المعرفة على $]0, +\infty[$ بتالي

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln x}{x-1} \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

ب. لتبين ان f قابلة للاستقار في 1 و $f'(1) = -\frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x-1} \quad \text{لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)^2}$$

نضع $x = x-1$ في صبح

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - x}{x^2}$$

و حسب ماسيف

$$\frac{\ln(x+1) - x}{x^2} = \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t} dt = \frac{1}{2}$$

في

$$\frac{x}{3(x+1)} - \frac{1}{2} < \frac{\ln(x+1) - x}{x^2} < \frac{x}{3} - \frac{1}{2}$$

ولا حظ ان

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3(x+1)} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$x \in]0, 1[$

لدينا $x^2 < t < x$

وبما أن f تناقصية

$$f(x) < f(t) < f(x^2)$$

$$\frac{\ln x}{x-1} < \frac{\ln t}{t-1} < \frac{2 \ln x}{x^2-1}$$

$$\forall (x, x^2) \in]0, 1[\quad x^2 < x$$

$$\frac{\ln x}{x-1} \int_{x^2}^x 1 dt \leq \int_{x^2}^x \frac{\ln t}{t-1} dt \leq \frac{2 \ln x}{x^2-1} \int_{x^2}^x 1 dt$$

$$\frac{\ln x}{x-1} (x-x^2) \leq -F(x) \leq \frac{2 \ln x}{x^2-1} (x-x^2)$$

$$\frac{2x \ln x}{x+1} \leq F(x) \leq x \ln x$$

$$\forall x \in]0, +\infty[$$

$$\frac{2x \ln x}{x+1} \leq F(x) \leq x \ln x$$

ب - اتصال وقابلية اشتقاق

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \ln x}{x+1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 0 = F(0)$$

F متصلة على $\mathbb{R}^+$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

$$\frac{2 \ln x}{x+1} \leq \frac{F(x)}{x} \leq \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \ln x}{x+1} = -\infty$$

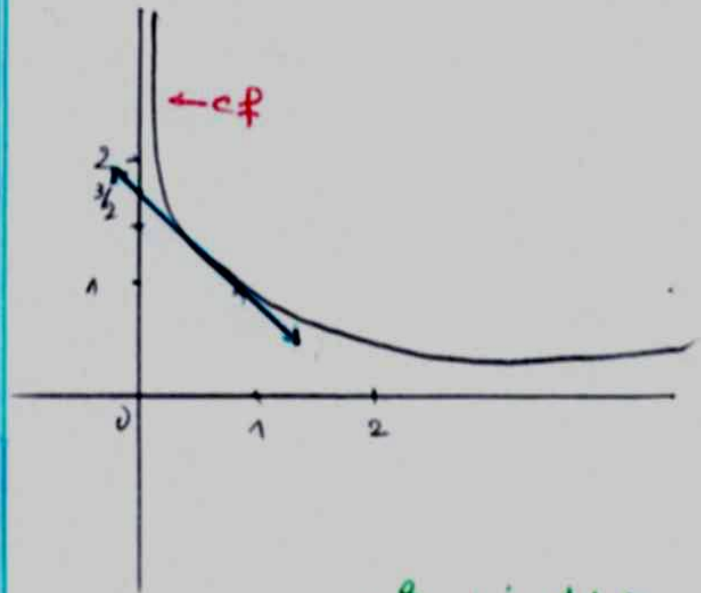
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{x} = -\infty$$

F غير قابلة للاشتقاق في ∞

4 - إنشاء المخطط cf

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$



الحزب ب

$$I =]0, +\infty[$$

$$F(x) = \int_x^1 f(t) dt \quad x \neq 0, x \neq 1$$

$$F(0) = 0, F(1) = 0$$

$$\frac{2x \ln x}{x+1} \leq F(x) \leq x \ln x$$

$x > 1$

$$x < t < x^2$$

f دالة تناقصية

$$f(x^2) < f(t) < f(x)$$

$$\frac{2 \ln x}{x^2-1} < \frac{\ln t}{t-1} < \frac{\ln x}{x-1}$$

$$\forall (x, x^2) \in]0, +\infty[\setminus \{1\} \quad x < x^2$$

$$\frac{2 \ln x}{x^2-1} \int_{x^2}^x 1 dt < \int_{x^2}^x \frac{\ln t}{t-1} dt < \int_{x^2}^x 1 dt \times \frac{\ln x}{x-1}$$

$$\frac{2 \ln x}{x^2-1} (x^2-x) < F(x) < \frac{\ln x}{x-1} (x^2-x)$$

$$\frac{2x \ln x}{x+1} < F(x) < x \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1} \cdot \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1} = 1 \quad \text{بحسب}$$

ب - لتبين ان

$$\ln(x+1) \ln x < F(x) < 2 \ln(x+1) \ln x$$

$$x < t \leq x^2$$

$$\ln x \leq \ln t \leq 2 \ln x$$

$$\frac{\ln x}{t-1} \leq \frac{\ln t}{t-1} \leq \frac{2 \ln x}{t-1}$$

$$\forall (x, x^2) \in]1, +\infty[\quad x < x^2$$

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1} dt \leq \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{t-1} dt \leq 2 \ln x \int_x^{x^2} \frac{1}{t-1} dt$$

$$\ln x [\ln(t+1)]_x^{x^2} < F(x) < 2 \ln x [\ln(t+1)]_x^{x^2}$$

$$\ln x \left(\ln \left(\frac{x^2+1}{x-1} \right) \right) < F(x) < 2 \ln x \left(\ln \left(\frac{x^2+1}{x-1} \right) \right)$$

$$\ln x \ln(x+1) < F(x) < 2 \ln x \ln(x+1)$$

ج - اخرج السكبي ر

$$\frac{\ln x \cdot \ln(x+1)}{x} < \frac{F(x)}{x} < \frac{2 \ln x \ln(x+1)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x \cdot \ln(x+1)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$$

لدينا اذا كان $x > 1$

$$\frac{x \ln x}{x+1} \leq F(x) \leq x \ln x$$

$$\frac{x \ln x}{x^2-1} \leq \frac{F(x)}{x-1} \leq \frac{x \ln x}{x-1}$$

$$\frac{x \ln x}{x^2-1} \leq \frac{F(x)-F(1)}{x-1} \leq \frac{x \ln x}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \ln x}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x+1} \cdot \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x+1} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \ln x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} = 1 \quad \text{اذن (1)}$$

اذا كان $0 < x < 1$

$$\frac{x \ln x}{x-1} < \frac{F(x)}{x-1} < \frac{x \ln x}{x^2-1}$$

بالمثل

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x \ln x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x \ln x}{x^2-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} = 1 \quad \text{اذن (2)}$$

من 1 و 2 لدينا F قابلة

للاستيفاف على كمين 1 و 1

$$F'_d(1) = F'_g(1) = 1$$

$\leq$ F قابلة للاستيفاف في 1

(4)

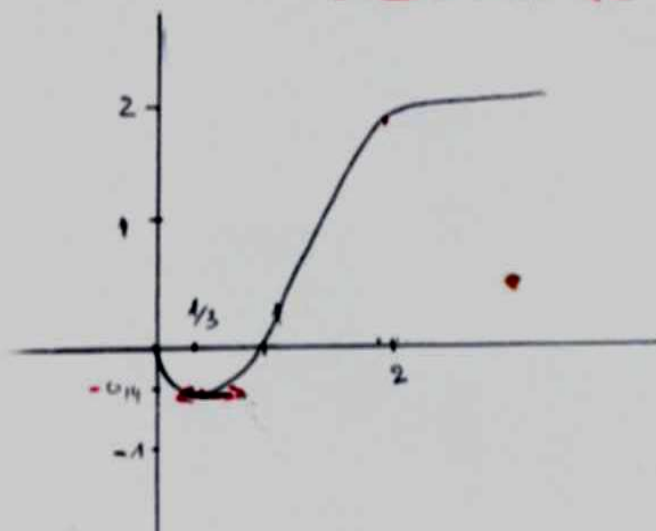
أي f قابلة للاستيفاء
على $]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2x f(x^2) - f(x) \\ &= 2x \times \frac{2 \ln(x)}{x^2-1} - \frac{\ln x}{x-1} \\ &= \frac{4x \ln x - x \ln x - \ln x}{x^2-1} \\ &= \frac{\ln x (3x-1)}{x^2-1} \end{aligned}$$

جدول تغيرات F

x	0	$1/3$	1	$+\infty$
$\ln x$		-	-	+
$3x-1$	-	0	+	+
$x-1$	-	-	0	+
$F'(x)$	-	0	+	+
$F(x)$	0			$+\infty$

المخطط



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}} \times \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}} \times \left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) - \ln(x+1)}{x} = 0$$

من جهة ثانية

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x \ln(x+1)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \left(\frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{2 \ln(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}} \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$$

وعليه C_F يقبل فرعا
شكليا نحو محور الـ F فاصلي.
3. قابلية استيفاء F

دالة G صليّة G بحيث
 $\frac{f}{t} \rightarrow \frac{\ln t}{t-1}$ مع $t \rightarrow 1$ اذن يقبل

$$F(x) = G(x^2) - G(x)$$

$G(x)$ قابلة للاستيفاء
على $]0, +\infty[$

$x \mapsto x^2$ قابلة للاستيفاء على
 $\mathbb{R}_+^*$ و $\mathbb{R}_+^*$

$G \circ u$ قابلة للاستيفاء
على $\mathbb{R}_+^*$

تمرين 2

$$iz = (1-2z)(z-i)$$

$$iz = z - i - 2z^2 + 2iz$$

$$0 = z + 2iz - 2z^2 - iz - i$$

وبالتالي .

$$2z^2 - iz - z + i = 0$$

$$2z^2 - z(1+i) + i = 0$$

من جهة أخرى .

$$\Delta = 2i - 8i = -6i = 3(-2i)$$

$$= (\sqrt{3}(1-i))^2$$

وعليه .

$$z_1 = \frac{1+i - \sqrt{3} + \sqrt{3}i}{4}$$

$$= \frac{1-\sqrt{3}}{4} + i \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$z_2 = \frac{1+i + \sqrt{3} - \sqrt{3}i}{4}$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{4} + i \left(\frac{1-\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$S = \left\{ \left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}, i \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4} \right) \right), \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}, i \left(\frac{1-\sqrt{3}}{4} \right) \right) \right\}$$

$$f(z) - i = \frac{iz - iz - 1}{z - i} = \frac{-1}{z - i}$$

$$= -\frac{1}{r} e^{-i\alpha}$$

$$= \frac{e^{i(\pi-\alpha)}}{r}$$

$$M(z) \in S \Leftrightarrow |f(z) - i| = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{r} = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow |z - i| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

نضع $A(x)$

$$\Leftrightarrow AM = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

كـ صـ الدائرة التي مركزها A
و شعاعها $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$f(z) = \frac{iz}{z-i}$$

لنثبت أولاً
 $f(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
لدينا

$$f(z) \in i\mathbb{R}$$

نقضي

$$\frac{iz}{z-i} = \frac{i\bar{z}}{\bar{z}+i}$$

$$\Leftrightarrow iz(\bar{z}+i) = i\bar{z}(z-i)$$

$$\Leftrightarrow iz\bar{z} - z = i\bar{z}z + \bar{z}$$

$$\Leftrightarrow z + \bar{z} = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$$

$$\Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$$

بـ - نحدد المجموعة
 $E_1 = \{M(z) | f(z) \in \mathbb{R}\}$

$$f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{iz}{z-i} = \frac{-i\bar{z}}{\bar{z}+i}$$

نقضي

$$\frac{iz}{z-i} = -\frac{i\bar{z}}{\bar{z}+i}$$

$$\Leftrightarrow iz(\bar{z}+i) = -i\bar{z}(z-i)$$

$$\Leftrightarrow iz\bar{z} - z = -i\bar{z}z - \bar{z}$$

$$\Leftrightarrow 2iz\bar{z} - (z - \bar{z}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2i|z|^2 - 2i\operatorname{Im}(z) = 0$$

$$z = x + iy$$

نضع

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - y = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

اذن E_1 هي الدائرة التي مركزها

$$O\left(0, \frac{1}{2}\right)$$

و شعاعها $\frac{1}{2}$

$$A(0, 1)$$

جـ - حل المعادلة

$$f(z) = 1 - 2z$$

$$\frac{iz}{z-i} = 1 - 2z$$

نقضي

$$\Rightarrow \pi - \alpha = \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

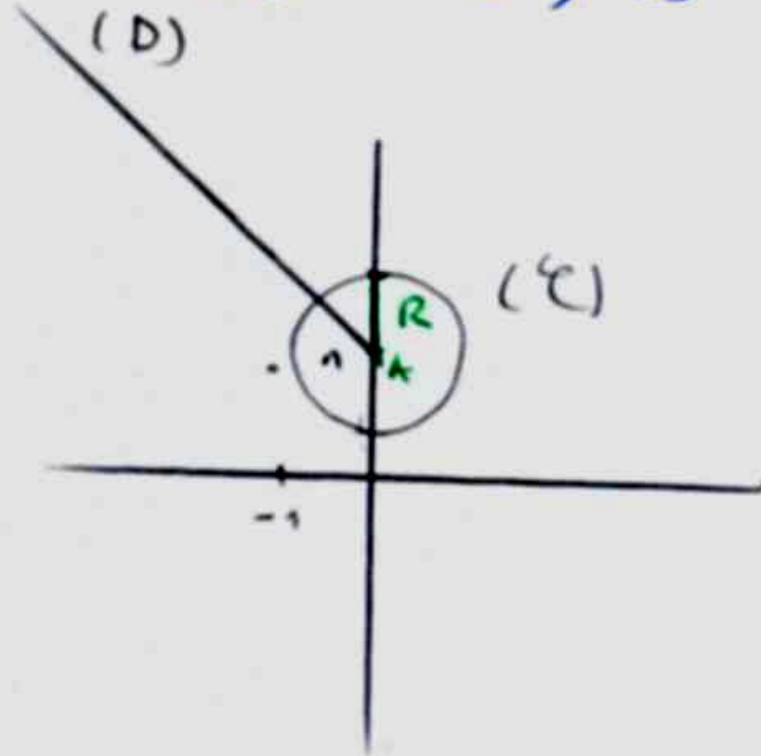
$$\Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4} [2\pi]$$

$$\Rightarrow (\vec{u}, \vec{AM}) = \frac{3\pi}{4} [2\pi]$$

اذن (D) نصف المستقيم الذي

معامله الموجب $\tan(\frac{3\pi}{4}) = -1$

و المصروف من $A(x)$



لأنه انجازته تحت إشراف

الاستاذ : الماسني

من طرف التلميذ : محرو

خاطبة السرمراء.

2012 - 2013.