

مسألة (10 نقط)

الجزء (A) : [1] بين أن :

$$(0.5 \text{ نقطة}) \quad (\forall x \in]-1, +\infty[- \{0\}) : \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t} dt = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} + \frac{1}{2}$$

$$(2) \text{ بين أن : } (\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) \quad x - 1 - x \ln x \leq 0 \quad (0.5 \text{ نقطة})$$

II] لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln x}{x-1} ; & x \neq 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

$$(1) \text{ أ- بين أن } (\forall x \in]-1, +\infty[- \{0\}) : \frac{x}{3(x+1)} \leq \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t} dt \leq \frac{x}{3} \quad (0.75 \text{ ن})$$

$$\text{ب- استنتج أن } f \text{ قابلة للاشتقاق في النقطة } 1 \text{ و أن } f'(1) = -\frac{1}{2} \quad (0.5 \text{ ن})$$

$$(2) \text{ أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى } (C_f) \quad (0.75 \text{ نقطة})$$

$$(3) \text{ أحسب المشتقة } f'(x) \text{ و أنجز جدول تغيرات الدالة } f \quad (0.75 \text{ نقطة})$$

$$(4) \text{ أرسم المنحنى } (C_f) \quad (0.75 \text{ نقطة})$$

الجزء (B) : لتكن F الدالة العددية المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} F(x) = \int_x^{x^2} f(t) dt & x \neq 0 ; x \neq 1 \\ F(0) = 0 & ; F(1) = 0 \end{cases}$$

$$(1) \text{ أ- بين أن } (\forall x \in \mathbb{R}^{+*} - \{1\}) \quad \frac{2x \ln x}{x+1} \leq F(x) \leq x \ln x \quad (0.75 \text{ نقطة})$$

$$\text{ب- أدرس اتصال وقابلية اشتقاق } F \text{ على يمين } 0 \quad (0.5 \text{ نقطة})$$

ج- أدرس قابلية اشتقاق F في النقطة 1 (0.75 نقطة)

$$(2) \text{ أ- أحسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \quad (0.5 \text{ نقطة})$$

$$\text{ب- بين أن } (\forall x \in]1, +\infty[) \quad \ln x \ln(x+1) \leq F(x) \leq 2 \ln x \ln(x+1) \quad (0.75 \text{ ن})$$

ج- بين أن المنحنى Γ_F يقبل عند $+\infty$ فرعاً شلجيميا اتجاهه محور الأفاصيل (0.75 ن)

$$(3) \text{ بين أن } F \text{ قابلة للاشتقاق على }]1, +\infty[\cup]0, 1[\quad D =]0, 1[\cup]1, +\infty[\quad (1 \text{ نقطة})$$

$$\text{و أن } (\forall x \in D) \quad F'(x) = \frac{(3x-1) \ln x}{x^2 - 1} \quad \text{ثم أنجز جدول تغيرات الدالة } F$$

$$(4) \text{ أرسم المنحنى } \Gamma_F \quad (\text{نأخذ } F(\frac{1}{3}) = -0.44 \text{ و } \Gamma_F \text{ يقبل نقطة انعطاف وحيدة في } I(1.9; 1.2)) \quad (0.5 \text{ نقطة})$$

تمرين (3 نقط)

$$\text{لكل عدد عقدي } z \text{ يخالف } i. \text{ نضع } f(z) = \frac{iz}{z-i}$$

$$(1) \text{ أ- بين أن } (z \in i\mathbb{R}) \Leftrightarrow (f(z) \in i\mathbb{R}) \quad (0.5 \text{ نقطة})$$

$$\text{ب- حدد المجموعة : } (E_1) = \{M(z) / f(z) \in \mathbb{R}\} \quad (0.5 \text{ نقطة})$$

$$(2) \text{ حل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة } f(z) = 1 - 2z \quad (0.5 \text{ نقطة})$$

$$(3) \text{ نضع } z - i = re^{i\alpha}$$

$$\text{أ- حدد الشكل المثلثي للعدد } f(z) - i \quad (0.5 \text{ نقطة})$$

$$\text{ب- حدد و أرسم المجموعتين } \zeta = \{M(z) / |f(z) - i| = \sqrt{2}\}$$

$$\text{و } D = \{M(z) / \arg(f(z) - i) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]\} \quad (1 \text{ نقطة})$$

د : الحاتمة