

## الموضوع 1 : (12 ن)

لكل  $n$  من  $N$  نعتبر  $f_n$  الدالة المعرفة على  $]-1, +\infty[$  بما يلي  $f_n(x) = \frac{e^x}{(1+x)^n}$

نرمز بـ  $(C_n)$  لمنحنائها في معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  حيث  $\|\vec{i}\| = 2cm$

### الجزء الأول :

- 1- أ- أدرس تغيرات الدوال  $f_1$  و  $f_2$  (نهايات، حساب مشتقة، جدول تغيرات)
- ب- أدرس الوضع النسبي لـ  $(C_1)$  و  $(C_2)$  وأنشئهما في نفس المعلم.
- 2- أحسب مساحة الحيز المحصور بين  $(C_1)$  و  $(C_2)$  والمستقيمت ذات المعادلة  $x=0$  و  $x=1$
- 3- أ- أثبت أن لكل  $n \in N^*$   $f_n$  تقبل قيمة دنوية  $u_n$  عند العدد  $n-1$
- ب- أثبت أن  $\forall x \geq 0: f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$  واستنتج أن  $(u_n)_{n \geq 1}$  تناقصية.
- ج- أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

### الجزء الثاني :

لكل  $x > \frac{1}{e}$  نضع  $F(x) = \int_0^{\ln x} f_2(t) dt$

- 1- عل وجود  $F(x)$  لكل  $x > \frac{1}{e}$
- 2- أثبت أن  $\forall x \in ]\frac{1}{e}, 1]: F(x) \leq x \left(1 - \frac{1}{1 + \ln x}\right)$  واستنتج  $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{e}\right)^+} F(x)$
- 3- أ- أثبت أن  $F(x) = \frac{x}{(1 + \ln x)^2} - 1 + 2 \int_0^{\ln x} f_3(t) dt$
- ب- استنتج أن  $\forall x \geq 1: F(x) \geq \frac{x}{(1 + \ln x)^2} - 1$  واحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$
- ج- أثبت أن  $F$  تقابل من  $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$  نحو  $\mathbb{R}$

## الموضوع 2 : (8 ن)

- 1- ليكن  $p$  عددا أوليا حيث  $p > 2$
- أ- أثبت أن  $\forall k \in \{1, 2, \dots, p-1\}: p \mid C_k^p$
- ب- بين بالترجع أن  $\forall n \in N^*: n^p \equiv n[p]$
- 2- نعتبر  $a \in N$  حيث  $a \wedge p = 1$  ونضع  $A = \{k \in N^* / a^k \equiv 1[p]\}$
- أ- تحقق أن  $(p-1) \in A$  (يمكن استعمال السؤال 1-أ)
- نرمز بـ  $d$  لأصغر عناصر المجموعة  $A$
- ب- ليكن  $n \in N^*$  أثبت أنه إذا كان  $r$  باقي قسمة  $n$  على  $d$  فإن  $a^n \equiv a^r[p]$
- ج- استنتج أن  $\forall n \in A: d \mid n$
- 3- نعتبر العدد  $u_n = \underbrace{111\dots11}_{n \text{ مرة}}$  (كتابة  $u_n$  في أنظمة العدد العشري)
- أ- تحقق أن  $9u_n = 10^n - 1$
- ب- باستعمال السؤال (1) أثبت أن  $10^6 \equiv 1[7]$
- ج- أثبت أن  $6/n \Leftrightarrow 7/u_n$