

فرض محروس رقم 3

www.manti.ift.fr

النصين الأول

نعتبر المتتالية العددية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0 = 1$ و $U_{n+1} = U_n + \frac{1}{U_n}$

(1) بين أن $U_n \geq 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) و بين أن المتتالية $(U_n)_n$ تزايدية

(2) أ- بين أن $2 \leq U_{n+1}^2 - U_n^2 \leq 2 + U_{n+1} - U_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

ب- استنتج أن $2n \leq U_n^2 - 1 \leq 2n - 1 + U_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) و حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

(3) بين أن $1 - \frac{1}{U_n} \leq \frac{2n}{U_n^2} \leq 1 - \frac{1}{U_n^2}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2n}}{U_n}$

النصين الثاني

(I) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ بما يلي : $f(x) = \sqrt{\sin x}$

(1) أدرس منحنى تغيرات الدالة f

(2) أ- بين أن f تقابل من $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ نحو $[0, 1]$ و لتكن g تقابله العكسي

ب- أرسم المنحنيين (C_f) و (Γ_g) في نفس المحل السابق

(3) بين أن g قابلة للاشتقاق على $]0, 1[$ و أن $g'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

(II) لتكن φ الدالة المعرفة على $[0, 1]$ بما يلي : $\varphi(x) = \sqrt[4]{1-x^4}$

و نضع $h(x) = (g \circ \varphi)(x)$

(1) أ- حدد مجموعة قابلية اشتقاق الدالة φ و أحسب مشتقتها

ب- بين أن h قابلة للاشتقاق على $]0, 1[$ و أن $h'(x) = -g'(x)$

ج- أحسب $h(0)$ و استنتج أن $h(x) = \frac{\pi}{2} - g(x)$ ($\forall x \in [0, 1]$)

(III) نعتبر المتتالية $(U_n)_{n \geq 1}$ بحيث : $U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} h\left(\frac{k}{n^2}\right)$

(1) بين أن $h\left(\frac{1}{n}\right) \leq h\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq h\left(\frac{1}{n^2}\right)$ لكل عدد طبيعي k من $\{1; 2; \dots; n\}$

(2) استنتج أن المتتالية $(U_n)_{n \geq 1}$ متقاربة و حدد نهايتها

النصين الثالث

لكل عدد عقدي z من $\mathbb{C} - \{1+i\}$ نضع $f(z) = \frac{(1+i)z}{2 - (1-i)z}$

(1) أ- بين أن $f(\bar{z}) = \overline{f(z)} \Leftrightarrow z - \bar{z} + i(z + \bar{z}) = 2i z \bar{z}$

ثم حدد المجموعة $(C) = \{M(z) / f(z) \in \mathbb{R}\}$

ب- تحقق أن $f(z) = \frac{iz}{1+i-z}$

ثم حدد المجموعة $(D) = \{M(z) / |f(z)| = 1\}$

ج- لتكن A النقطة ذات اللق $1+i$.

بين أن : $\arg(f(z)) \equiv \overline{(MA, MO)} - \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

ثم استنتج المجموعة $(\Gamma) = \{M(z) / \arg(f(z)) \equiv 0 \quad [2\pi]\}$

النصين الرابع

(1) ليكن u عدد من $\mathbb{C}$ معياره 1 و x عدد حقيقي بين أن $|x - u| = |1 - xu|$

(2) بين أن $|z| + |z'| \leq |z + z'| + |z - z'|$ لكل عددين عقديين z و z'

www.manti.ift.fr