هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	الأعداد العقدية- الحساب التكاملي حلول مقترحة	

فرض تجريبي مساهمة من أحد أصدقاء موقع رياضيات النجاح - مدة الانجاز ساعتان

تمرين 1 :

1

$$I(x)=\int_0^x e^t\cos(2t)\,dt=\int_0^x\left(e^t\right)'\cos(2t)\,dt=\left[e^t\cos(2t)\right]_0^x-\int_0^x e^t\left(\cos(2t)\right)'\,dt$$
$$=\left[e^t\cos(2t)\right]_0^x+2\int_0^x e^t\sin(2t)\,dt=\left[e^t\cos(2t)\right]_0^x+2\int_0^x\left(e^t\right)'\sin(2t)\,dt$$
$$=\left[e^t\cos(2t)\right]_0^x+2\left(\left[e^t\sin(2t)\right]_0^x-\int_0^x e^t\left(\sin(2t)\right)'\,dt\right)$$
$$I(x)=\left[e^t\cos(2t)+2e^t\sin(2t)\right]_0^x-2\left(2\int_0^x e^t\cos(2x)\,dt\right)=\left[e^t\left(\cos(2t)+2\sin(2t)\right)\right]_0^x-4\,I(x)$$

بالتالي :

$$I(x)=\int_0^x e^t\cos(2t)\,dt=\int_0^x\left(e^t\right)'\cos(2t)\,dt=\left[e^t\cos(2t)\right]_0^x-\int_0^x e^t\left(\cos(2t)\right)'\,dt$$
$$=\left[e^t\cos(2t)\right]_0^x+2\int_0^x e^t\sin(2t)\,dt=\left[e^t\cos(2t)\right]_0^x+2\int_0^x\left(e^t\right)'\sin(2t)\,dt$$
$$=\left[e^t\cos(2t)\right]_0^x+2\left(\left[e^t\sin(2t)\right]_0^x-\int_0^x e^t\left(\sin(2t)\right)'\,dt\right)$$
$$I(x)=\frac{1}{5}\left[e^t\left(\cos(2t)+2\sin(2t)\right)\right]_0^x=\frac{\left(\cos(2x)+2\sin(2x)\right)e^x-1}{5}$$

2

الدالة $g:x\to e^x\cos(2x)$ قابلة للاشتقاق على IR على المجال $[0;\Re[$

و لدينا : $\forall x\in IR\ g'(x)=e^x\left(\cos(2x)-2\sin(2x)\right)$ ، و لكون الدالة g' متصلة على $[0;\Re[$ فهي محدودة

عليه، بالتالي :

$$v_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k\Re}{n}}\cos\left(\frac{2k\Re}{n}\right)=\frac{1}{\Re}\,\frac{\Re}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k\Re}{n}}\cos\left(\frac{2k\Re}{n}\right)=\frac{1}{\Re}\,\frac{\Re-0}{n}\sum_{k=1}^{n}g\left(0+k\frac{\Re-0}{n}\right)$$
$$v_n=\frac{1}{\Re}\int_0^{\Re}g(t)dt=\frac{I(\Re)}{\Re}=\frac{e^{\Re}-1}{5\Re}$$

تمرين 2 :

$$(E):\ z^2+2\left(1-i\sqrt{3}\right)z-4\left(1+i\sqrt{3}\right)=0$$

الجزء الأول

1

لدينا :

$$\Delta=4\left(1-i\sqrt{3}\right)^2+16\left(1+i\sqrt{3}\right)=4\left(1-2i\sqrt{3}-3+4+4i\sqrt{3}\right)=4\left(2+2i\sqrt{3}\right)=16\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=16\,e^{\frac{\Re}{3}i}$$

2

أحد الجذرين المربعين لـ Δ هو : $\delta=4\,e^{\frac{\Re}{6}i}=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$

منه :

$$z_1=\frac{-2\left(1-i\sqrt{3}\right)+4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)}{2}=-1+i\sqrt{3}+\sqrt{3}+i=\sqrt{3}-1+\left(\sqrt{3}+1\right)i$$

و :

$$z_2=\frac{-2\left(1-i\sqrt{3}\right)-4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)}{2}=-1+i\sqrt{3}-\sqrt{3}-i=-\sqrt{3}-1+\left(\sqrt{3}-1\right)i$$

3

لدينا :

$$z_1^2=\left(\sqrt{3}-1+\left(\sqrt{3}+1\right)i\right)^2=\left(\sqrt{3}-1\right)^2+2\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)i-\left(\sqrt{3}+1\right)^2$$
$$z_1^2=4-2\sqrt{3}+4i-\left(4+2\sqrt{3}\right)=-4\sqrt{3}+4i=4\left(-\sqrt{3}+i\right)$$

و:

$$i\,z_1=i\left(\sqrt{3}-1+\left(\sqrt{3}+1\right)i\right)=i\left(\sqrt{3}-1\right)-\left(\sqrt{3}+1\right)=z_2$$

4

$$z_1^2=4\left(-\sqrt{3}+i\right)=8\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\left[8,\frac{5\Re}{6}\right]$$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

5 بما أن : $z_1^2=\left[8,\frac{5\Re}{6}\right]$ فإن : $z_1=\left[\sqrt{8},\frac{5\Re}{12}\right]$ أو $z_1=\left[\sqrt{8},\frac{5\Re}{12}+\Re\right]$

أي : $z_1=\left[2\sqrt{2},\frac{5\Re}{12}\right]$ أو $z_1=\left[2\sqrt{2},\frac{17\Re}{12}\right]$

ولكن وبما أن $\mathrm{Re}(z_1)>0$ و $\mathrm{Re}\left(\left[2\sqrt{2},\frac{17\Re}{12}\right]\right)=2\sqrt{2}\cos\left(\frac{17\Re}{12}\right)<0$ فإن : $z_1=\left[2\sqrt{2},\frac{5\Re}{12}\right]$

منه : $z_2=\boldsymbol{i}\,z_1=\left[1,\frac{\Re}{2}\right]\left[2\sqrt{2},\frac{5\Re}{12}\right]=\left[1\times 2\sqrt{2},\frac{5\Re}{12}+\frac{\Re}{2}\right]=\left[2\sqrt{2},\frac{11\Re}{12}\right]$

الجزء الثاني

$A(z_1)$ و $B(z_2)$ ، R الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\Re}{2}$ ، $M'(z')$ صورة $M(z)$ بالدوران R

1 الكتابة العقدية للدوران R هي $z'=\boldsymbol{i}\,z$

بما أن : $z_2=\boldsymbol{i}\,z_1$ فإن : $B=R(A)$

2 أ) لدينا لكل $z\neq z_2$ و $z\neq z_1$: $z'=\boldsymbol{i}\,z$ و $z_2=\boldsymbol{i}\,z_1$ منه : $\frac{z'-z_2}{z-z_2}=\frac{\boldsymbol{i}\,z-\boldsymbol{i}\,z_1}{z-z_2}=\boldsymbol{i}\frac{z-z_1}{z-z_2}$

منه : $\arg\left(\frac{z'-z_2}{z-z_2}\right)\equiv\arg(\boldsymbol{i})+\arg\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right)[2\Re]$ أي : $\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'}\right)\equiv\frac{\Re}{2}+\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}\right)[2\Re]$

ب) إذا كانت $M=B$ أو $M=A$ فالنقط M و B و M' مستقيمية.

إذا كانت $M\neq B$ أو $M\neq A$ فإن :

$M\in(T)\Leftrightarrow\left(\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'}\right)\equiv 0[2\Re]\ ou\ \left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'}\right)\equiv\Re\,[2\Re]\right)$

$M\in(T)\Leftrightarrow\left(\frac{\Re}{2}+\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}\right)\equiv 0[2\Re]\ ou\ \frac{\Re}{2}+\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}\right)\equiv\Re\,[2\Re]\right)$

$M\in(T)\Leftrightarrow\left(\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}\right)\equiv\frac{-\Re}{2}[2\Re]\ ou\ \left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}\right)\equiv\frac{\Re}{2}[2\Re]\right)$

$M\in(T)\Leftrightarrow(BM)\perp(AM)$

خلاصة : (T) هي الدائرة ذات القطر $[AB]$

تمرين 3 :

الجزء الأول

$$\forall x\in IR^*\qquad g(x)=1+\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$$

1 الدالة g متصلة و قابلة للاشتقاق على IR^* ، ولدينا :

$$\forall x\in IR^*\ \ g'(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)\times\frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}+\left(\frac{-1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}=\left(\frac{-1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}+1\right)=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\left(\frac{2x+1}{-x}\right)$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$2x+1$	-	0	+		+		
$-x$	+		+	0	-		
$g'(x)$	-	0	+		-		
$g(x)$	↘		$\frac{e^2-1}{e^2}$	↗		↘	

ليس مطلوبا إدراج النهايات في المحدات في جدول التغيرات ما دام لم يرد حسابها في أي سؤال سابق.

2 لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=1+1=2$ بما أن الدالة g تناقصية قطعا على $]0;+\infty[$ فإن : $\forall x\in]0;+\infty[\ \ g(x)>2$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

	ولدينا : $\forall x\in]-\infty;0[\ \ g(x)>\dfrac{e^2-1}{e^2}$ ، بالتالي: $\forall x\in IR^*\ \ g(x)>0$
	الجزء الثاني $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}\ ;x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$
1	لدينا : $\left(\dfrac{0+}{+\infty}\right)$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$ و $\left(\dfrac{0+}{1+0}\right)$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$ بالتالي : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$ ، ما يعني أن f متصلة في الصفر
2	بما أن الدوال : $x\mapsto x$ و $x\mapsto 1+e^{\frac{1}{x}}$ قابلة للاشتقاق على IR^* وحيث أن : $\forall x\in IR^*\ 1+e^{\frac{1}{x}}\neq 0$ فإن f قابلة للاشتقاق على IR^* و لدينا : $\forall x\in IR^*\ \ f'(x)=\left(\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right)'=\dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}-x\left(\frac{-1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}=\dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}=\dfrac{g(x)}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$
3	سبق و برهنا أن $\forall x\in IR^*\ \ g(x)>0$ منه : $\forall x\in IR^*\ \ f'(x)>0$ ولكون : $f'(0)=0$ فإن : $\forall x\in IR\ \ f'(x)\geq 0$ و $f'(x)=0\ \Leftrightarrow\ x=0$ (أي أن المشتقة تنعدم في عدد معدود من الحلول) بالتالي f تزايدية قطعا على IR
	الجزء الثالث $\forall x\in[1;+\infty[\quad F(x)=\int_1^{x^2} f(t)dt$
1	ليكن $x\in]1;+\infty[$ ، بما أن الدالة $t\mapsto f(t)$ متصلة على $[1;x^2]$ فإن : $(\exists c_x\in]1;x^2[)\ \ f(c_x)=\dfrac{1}{x^2-1}\int_1^{x^2} f(t)dt$ أي : $(\exists c_x\in]1;x^2[)\ \ f(c_x)=\dfrac{1}{x^2-1}F(x)$ بالتالي : $(\forall x>1)\ \ (\exists c_x\in]1;x^2[)\ \ f(c_x)=\dfrac{1}{x^2-1}F(x)$
2	ليكن $x\in]1;+\infty[$ إذن : $(\exists c_x\in]1;x^2[)\ \ f(c_x)=\dfrac{1}{x^2-1}F(x)$ بما أن f تزايدية قطعا على IR فإن : $1<c_x<x^2\ \Rightarrow\ f(1)<f(c_x)<f(x^2)\ \Rightarrow\ f(1)<\dfrac{1}{x^2-1}F(x)<f(x^2)\ \Rightarrow\ (x^2-1)f(1)\leq F(x)\leq (x^2-1)f(x^2)$ بالنسبة لـ $x=1$ المتفاوتة صحيحة بالتالي : لكل x من $[1;+\infty[$: $(x^2-1)f(1)\leq F(x)\leq (x^2-1)f(x^2)$
3	لدينا : $\forall x>1\quad (x+1)f(1)\leq\dfrac{F(x)-F(1)}{x-1}\leq (x+1)f(x^2)$ ($F(1)=0$) وبما أن : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}}(x+1)f(1)=2f(1)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}}(x+1)f(x^2)=2f(1)$ فإن : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}}\dfrac{F(x)-F(1)}{x-1}=2f(1)$ بالتالي F قابلة للاشتقاق يمين 1 ولدينا : $F'_d(1)=2f(1)=\dfrac{2}{1+e}$
4	بما أن $t\mapsto f(t)$ متصلة على $[1;x^2]$ فإن $F(x)$ معرفة لكل $x\geq 1$ و قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$ وبوضع : $U(x)=\int_1^x f(t)dt$ فإن : $\forall x\in[1;+\infty[\quad F(x)=U(x^2)$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

	منه : $\forall x \in]1;+\infty[\quad F'(x)=2xU'(x^2)=2xf(x^2)=\dfrac{2x^3}{1+e^{\frac{1}{x^2}}}$
	الجزء الرابع $\forall n \in IN^* \quad u_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\dfrac{f(t)}{t^3}dt$
1	لدينا : $\forall n \in IN^* \; u_{n+1}-u_n=\int_{\frac{1}{n+1}}^{1}\dfrac{f(t)}{t^3}dt-\int_{\frac{1}{n}}^{1}\dfrac{f(t)}{t^3}dt=\int_{\frac{1}{n+1}}^{1}\dfrac{f(t)}{t^3}dt+\int_{1}^{\frac{1}{n}}\dfrac{f(t)}{t^3}dt=\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}\dfrac{f(t)}{t^3}dt$ وبما أن الدالة $t\mapsto\dfrac{f(t)}{t^3}$ موجبة قطعا على $\left[\dfrac{1}{n+1};\dfrac{1}{n}\right]$ فإن : $\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}\dfrac{f(t)}{t^3}dt>0$ بالتالي $(u_n)_{n\geq 1}$ تزايدية قطعا
2	نضع : $u=\dfrac{1}{t}$ منه : $t=\dfrac{1}{u}$ منه : $dt=\dfrac{-1}{u^2}du$ و $\begin{cases}t=\dfrac{1}{n}\Rightarrow u=n\\ t=1\Rightarrow u=1\end{cases}$ منه : $u_n=\int_n^1\dfrac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{\frac{1}{u^3}}\left(\dfrac{-1}{u^2}\right)du=-\int_n^1 u\,f\left(\dfrac{1}{u}\right)du=-\int_n^1 u\dfrac{\frac{1}{u}}{1+e^u}du=\int_n^1\dfrac{-1}{1+e^u}du=\int_n^1\dfrac{-1-e^u+e^u}{1+e^u}du$ $u_n=\int_n^1\left(-1+\dfrac{e^u}{1+e^u}\right)du=\int_1^n\left(1-\dfrac{e^u}{1+e^u}\right)du$
3	$u_n=\int_1^n\left(1-\dfrac{e^u}{1+e^u}\right)du=\left[u-\ln\left(1+e^u\right)\right]_1^n=n-\ln\left(1+e^n\right)-1+\ln(2)=\ln(2)-1-\ln\left(\dfrac{1+e^n}{e^n}\right)$ بالتالي : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ln(2)-1-\ln(1)=\ln(2)-1$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma