

ثانوية أليس

فرض محروس

المستوى 2 باك عر

مسألة :

$$f(x) = xe^x + e^{-x}$$

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

الجزء I :

1- أجب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2- أدرس تغيرات f على $\mathbb{R}^+$ وحدد جدول تغيراتها على $\mathbb{R}^+$

3- حدد دالة أولية للدالة $x \mapsto xe^{-x}$

4- استنتج أن : $\forall x \geq 0, 0 \leq xe^{-x} \leq 1$ و $f(x) - f(x) < 0$

5- كصف أن : $1 - u \leq \frac{1}{1+u} \leq 1 - \frac{1}{2}u$ $\forall u \in (0, 1)$

6- استنتج : $\forall t \geq 0, 1 - te^{-t} \leq \frac{1}{1+te^{-t}} \leq 1 - \frac{1}{2}te^{-t}$

الجزء II :

نعتبر الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{1+te^{-t}} dt$

1- أثبت أن : $\forall x \geq 0, x + f(x) - f(x) \leq F(x) \leq x + \frac{1}{2}(f(x) - f(x))$

2- استنتج : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x) - x)$

3- بين أن : $\forall x \geq 0, F(x) \leq x$

4- بين أن F ق.ش. على $\mathbb{R}^+$ و أن :

$$F'(x) = \frac{e^{2x} + 2x(e^x - 1)}{(e^{2x} + 2x)(1 + xe^x)}, \quad \forall x \geq 0$$

5- استنتج تغيرات F على $\mathbb{R}^+$

6- أنشئ $\mathcal{C}_F$

7- أ. حدد دالة أولية للدالة $x \mapsto f(x) - f(x)$

ب. أعط تأطيرا لمساحة الكيزم للمستوى المحصور بين $\mathcal{C}_F$

و المستقيعات $x=0$ و $x=1$ و $y=0$

الجزء IV

أجب نهاية المتتالية : $u_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$