ثانوية الجولان التأهيلية - بيوكرى -

السنة الثانية بكالوريا علوم رياضية

السنة الدراسية : 2011 – 2010

فرض منزلي رقم : 03

الأستاذ : أحمد مومني

التمرين رقم : 01

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\log_2(x)-\log_x(2) & , \quad x\in]0,+\infty[-\{1\} \\ f(x)=e^{\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}} & , \quad x\in]-\infty,0[\\ f(0)=0 \end{cases}$$

و (C_f) منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1 – أ – أحسب النهايتين $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

ب – بين أن الدالة f متصلة على اليسار في 0

2 – ا – بين أن : $\dfrac{f(x)}{x}=\left(\dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\right)e^{\frac{x^2}{2}} \qquad (\forall x<0)$

ب – أدرس اشتقاق الدالة f على يسار 0 ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها

3 – أ- بين أن :

$$\frac{f(x)}{x}=\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{e^{\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}}}{\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}}\right) \qquad (\forall x<0)$$

ب – استنتج $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها

ج – حدد الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f)

4 – أ – بين أن :

$$\begin{cases} f'(x)=\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\ln 2}+\dfrac{\ln 2}{(\ln x)^2}\right) & , \quad x\in]0,+\infty[-\{1\} \\ f'(x)=\left(\dfrac{x^3-1}{x^2}\right)e^{\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}} & , \quad x\in]-\infty,0[\end{cases}$$

ب – استنتج جدولا لتغيرات الدالة f

5– أ – حل في $]0,+\infty[-\{1\}$ المعادلة: $f(x)=0$ ثم استنتج أفاصيل نقط تقاطع (C_f) مع محور الأفاصيل

ب – أنشئ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ المنحنى (C_f)

التمرين رقم : 02

لكل $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ نعتبر الدالة العددية f_n للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي: $f_n(x)=\dfrac{1+n\ln x}{x^2}$

و (C_n) منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

الجزء الأول:

1 – a – أحسب النهايتين $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x\to0^+} f_n(x)$ وأول هندسيا النتيجتين المحصل عليهما

b – بين أن: $f_n'(x)=\dfrac{n-2-2n\ln x}{x^3} \qquad (\forall x\in\mathbb{R}_+^*)$

c – لكل $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ أحسب $f\left(e^{\frac{n-2}{2n}}\right)$ بدلالة n

d– استنتج جدولا لتغيرات الدالة f_n على $]0,+\infty[$

2 – a – أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1})

b – أنشئ المنحنيين (C_2) و (C_3) في نفس المعلم المتعامد الممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ($e^{\frac{1}{6}}\simeq1{,}18$ و $f_3\left(e^{\frac{1}{6}}\right)\simeq1{,}08$)

الجزء الثاني:

نفترض في هذا الجزء أن $n\geq3$

1 – a – تحقق أن $f_n\left(e^{\frac{n-2}{2n}}\right)\rangle\,1 \qquad (\forall n\geq3)$

b – تحقق أن المعادلة $f_n(x)=1$ لا تقبل حلا في المجال $\left]1,e^{\frac{n-2}{2n}}\right[$

2 – بين أن المعادلة $f_n(x)=1$ تقبل حلا وحيدا α_n في المجال $\left]e^{\frac{n-2}{2n}},+\infty\right[$

3 – a – بين أن: $f_n\left(\sqrt{n}\right)\geq1$ لكل $n\,\rangle\,e^2$

b – استنتج أن : $\alpha_n\geq\sqrt{n} \qquad (\forall n\geq8)$ و حدد $\lim_{n\to+\infty}\alpha_n$

التمرين رقم : 03

الجزء الأول:

لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]-\infty,0[$ بما يلي: $g(x)=\dfrac{1-x}{x}-\ln(-x)$

1 – a – أحسب $g'(x)$ وضع جدولا لتغيرات الدالة g

b – استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-\infty,0[$

الجزء الثاني:

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=e^{x^2-x+\ln x} & , \quad x > 0 \\ f(x)=(-x)^{(1-x)} & , \quad x < 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

و (C_f) منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ $(\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1\,cm)$

1 – أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f)

2– a – أدرس اتصال الدالة f في النقطة 0

b – أدرس اشتقاق الدالة f في النقطة 0 ثم أول النتيجة هندسيا

3– a – بين أن: $\begin{cases} f'(x)=\dfrac{2x^2-x+1}{x}f(x) & , \quad x>0 \\ f'(x)=g(x)f(x) & , \quad x<0 \end{cases}$

b – استنتج جدولا لتغيرات الدالة f

4 – a – بين أن: $f(x)+x=-x\left(e^{-x\ln(-x)}-1\right)$ $\quad (\forall x\in]-\infty,0[)$

b – استنتج وضع قصور المنحنى (C_f) على $]-\infty,0[$ بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة: $y=-x$

c – ادرس وضع قصور المنحنى (C_f) على $]0,+\infty[$ بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة: $y=x$

5 – أنشئ المنحنى (C_f)

الجزء الثالث:

نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} U_0\in]0,1] \\ U_{n+1}=e^{U_n^2-U_n+\ln(U_n)} & , \quad (\forall n\in\mathbb{N}) \end{cases}$$

1 – بين أن لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا: $0 < U_n \le 1$

2 – تحقق أن: $U_{n+1}-U_n=U_n\left(e^{U_n(U_n-1)}-1\right)$ $\quad (\forall n\in\mathbb{N})$

3 – استنتج أن المتتالية (U_n) تناقصية و أنها متقاربة

التمرين رقم : 04

الجزء الأول:

لتكن h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $h(x)=Arc\tan x-x+\dfrac{x^3}{3}$

1 – بين أن : $1-x^2\leq\dfrac{1}{x^2+1}\leq 1-x^2+x^4 \quad (\forall x\in\mathbb{R})$

2 – a – بين أن : $|h'(x)|\leq x^4 \quad (\forall x\in\mathbb{R})$

b – استنتج أن : $|h(x)-h(0)|\leq|x|^5 \quad (\forall x\in\mathbb{R})$

c – بين أن: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Arc\tan x-x}{x^2}=0$

الجزء الثاني:

لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]-1,+\infty[$ بما يلي: $g(x)=\dfrac{x}{2x^2+2x+1}-Arc\tan\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

1 – أدرس تغيرات الدالة g

2 – بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا غير منعدما α من المجال $\left]-1,-\dfrac{1}{2}\right[$

3 – استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1,+\infty[$

الجزء الثالث

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{Arc\tan\left(\dfrac{x}{x+1}\right)-x}{x} & , \quad x\in]-1,0[\cup]0,+\infty[\\ f(0)=0 \\ f(-1)=\dfrac{\pi}{2}-1 \end{cases}$$

و (C_f) منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1 – بين أن f متصلة على المجال $[-1,+\infty[$

2 – a – أحسب النهاية : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Arc\tan\left(\dfrac{x}{x+1}\right)-x}{x^2}$ ثم أول النتيجة المحصل عليها مبيانيا

b – أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين النقطة -1

3 – أدرس تغيرات الدالة f

4 – أنشئ المنحنى (C_f) (نأخذ $\alpha\simeq\dfrac{-3}{4}$ و $f(\alpha)\simeq\dfrac{2}{3}$)