هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

فرض رقم 2

التمرين الأول :

لتكن $(U_n)_n$ متتالية معرفة بما يلي :

$U_n = \sum_{p=0}^{p=2n+1} \frac{n}{n^2+p}$ لكل عدد طبيعي غير منعدم n

1) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 2-\frac{2}{n+1} \le U_n \le 2+\frac{2}{n}$

2) أ- تحقق أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sqrt{n}-\sqrt{n-1} \ge \frac{1}{2n}$

ب- استنتج أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p} \le 2\sqrt{n}$

3) نضع $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} U_k$ لكل عدد طبيعي غير منعدم n

بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 2n-4\sqrt{n+1} \le S_n \le 2n+4\sqrt{n}$

و حدد $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$

التمرين الثاني :

لتكن $(U_n)_n$ متتالية هندسية حدودها غير منعدمة أساسها q .

لكل عدد طبيعي n نضع : $S = U_0 + U_1 + ... + U_{n-1}$

و $P = U_0 U_1 ..... U_{n-1}$ و $T = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + ... + \frac{1}{U_{n-1}}$

1) بين أن $\frac{S}{T} = U_0^2 \; q^{n-1}$

2) استنتج أن $P^2 = \left(\frac{S}{T}\right)^n$

التمرين الثالث :

نعتبر المتتاليتين $(U_n)_n$ و $(V_n)_n$ المعرفتين بما يلي : $U_n = \sum_{k=0}^{k=2n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ و $V_n = \sum_{k=0}^{k=2n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

1) بين أن $(U_n)_n$ و $(V_n)_n$ متجاورتين

2) نضع $f_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$

أ- بين أن $f_n'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$

ب- أثبت أن $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad f_{2n+1}(x) \le \arctan x \le f_{2n}(x)$

ج- استنتج نهاية كل من المتتاليتين $(U_n)_n$ و $(V_n)_n$

التمرين الرابع :

لكل عدد طبيعي n أكبر أو يساوي 3 نضع $f_n(x) = x^n - n(x-1) - 2$ لكل x من $\mathbb{R}^+$

1) بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلين u_n و v_n حيث أن $u_n < 1 < v_n$

2) أ- أدرس إشارة $f_{n+1}(x) - f_n(x)$

ب- أدرس رتابة المتتالية $(u_n)_n$ و استنتج أنها متقاربة

ج- بين أن $(\forall n \ge 3) \quad : \quad \frac{-2}{n} \le u_n - 1 \le \frac{-1}{n}$ ثم حدد $\lim_{n\to+\infty} u_n$

3) أ- أدرس رتابة المتتالية $(v_n)_n$ و استنتج أنها متقاربة

ب- بين أن $(\forall n \ge 3) \quad v_n > 1+\frac{1}{n}$ (نعطى $(\forall n \ge 3) \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$)

ب- بين أن $(\forall a > 0)(\forall n \in \mathbb{N}^*) \; (1+a)^n \ge 1+na+\frac{n(n-1)}{2}a^2$

ج- أحسب $f_n\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ و استنتج أن $(\forall n \ge 3) \quad v_n < 1+\frac{1}{\sqrt{n}}$

د- حدد نهاية المتتالية $(v_n)_n$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma