التمرين الأول

لتكن f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{a}{\sqrt{x-1}} & ; \quad x \geq 4 \\ f(x) = \dfrac{x+b}{x-5} & ; \quad x < 4 \end{cases}$$

1) حدد العلاقة بين a و b كي تكون الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$

2) حدد العددين a و b كي تكون الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

التمرين الثاني

لتكن f دالة معرفة على المجال $I = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\tan x} & ; \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} \\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

1) بين أن f قابلة للاشتقاق على $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

2) بين أن $-2 \leq f'(x) \leq -1 \quad (\forall x \in I)$

3) استنتج أن $\frac{\pi}{4} - x \leq \frac{1-\tan x}{\tan x} \leq \frac{\pi}{2} - 2x \quad \left(\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

التمرين الثالث

ليكن n من $\mathbb{N}^*$ و نعتبر الدالة f المعرفة على $I = \left]-1, \frac{\pi}{2}\right[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt[n]{x+1} - \dfrac{1}{\sqrt[n]{x+1}} & ; \quad x \in \left]-1, 0\right] \\ f(x) = -1 + \dfrac{1}{\cos^n x} & ; \quad x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

1) أ) بين ان الدالة f متصلة على I

ب) أدرس منحى تغيرات الدالة f على المجال I

2) أ) بين ان الدالة f تقابل من المجال I نحو مجال J يتم تحديده

ب) بين أن

$$\begin{cases} f^{-1}(x) = \left(\dfrac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^n - 1 & ; \quad x \in \left]-\infty, 0\right] \\ f^{-1}(x) = \arctan\left(\sqrt{(x+1)^{\frac{2}{n}} - 1}\right) & ; \quad x \in \left]0, +\infty\right[\end{cases}$$

التمرين الرابع

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال $[a,b]$.

نضع $g(x) = \dfrac{f(a)+f(x)}{2} - f\left(\dfrac{a+x}{2}\right) - \dfrac{(x-a)^2}{8}K$ و K بحيث $g(b) = 0$

1) أ) بين أن $g'(d) = 0 \quad (\exists d \in]a,b[)$

ب) تحقق أن : $f'(d) - f'\left(\dfrac{d+a}{2}\right) = \dfrac{K}{2}(d-a)$

2) استنتج أن :

$$(\exists c \in]a,b[) \quad \frac{f(a)+f(b)}{2} = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{8} f''(c)$$

الله ولي التوفيق