



نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[1, +\infty[$ بما يلي :

$$f(1) = 1 \text{ و } f(x) = \frac{\arctan \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} ; x > 1$$

(1) أ- بين أن f متصلة على يمين النقطة $x_0 = 1$

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة

(2) ليكن X من المجال $]0, +\infty[$ ونضع : $\varphi(t) = t^3 (\arctan X - X) - X^3 (\arctan t - t)$

أ- بين أن φ قابلة للاشتقاق على المجال $]0, X[$ وأحسب المشتقة $\varphi'(t)$

ب- بين أن $(\exists c \in]0, X[) \frac{\arctan X - X}{X^3} = \frac{-1}{3(1+c^2)}$

ج- استنتج أن $\lim_{\substack{X \rightarrow 0 \\ X > 0}} \frac{\arctan X - X}{X^3} = -\frac{1}{3}$

(3) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين النقطة $x_0 = 1$ ضع $X = \sqrt{x-1}$

(4) أ- باستعمال مبرهنة التزايد المتتالية بين أن : $(\forall X \in \mathbb{R}^+) \arctan X \geq \frac{X}{1+X^2}$

ب- بين أن $(\forall x \in]1, +\infty[) f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{(x-1)^3}} \left(\frac{\sqrt{x-1}}{x} - \arctan \sqrt{x-1} \right)$

ج- استنتج أن f تناقصية على $[1, +\infty[$

(5) أدرس المنحنى (C_f)



نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ بما يلي : $f(x) = \sin x$

(1) بين أن f تقابل من I نحو مجال J بتم تحديد

(2) لتكن f^{-1} التقابل العكسي للدالة f .

بين أن f^{-1} قابلة للاشتقاق على المجال $] -1, 1[$ وأن $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(3) نضع $F(x) = 2f^{-1}(\sqrt{x}) - f^{-1}(2x-1)$

أ- بين أن مجموعة تعريف الدالة F هي $D = [0, 1]$

ب- بين أن F قابلة للاشتقاق على $]0, 1[$ وأن $F'(x) = 0$

ج- استنتج أن $(\forall x \in [0, 1]) 2f^{-1}(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{2} + f^{-1}(2x-1)$