

2 بكالوريا علوم رياضية	فرض محروس رقم 02	منارة الفردوس
ن : عبد الله بن لختير	الدورة الأولى 2011/2010	نيابة الحميسات
مدة الانجاز : أربع ساعات		

• التمرين رقم 01: (03pts)

تتكن الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$f_n(x) = x^n - 1 + \text{Arc tan}(x) \text{ ، حيث } n \in \mathbb{N}^*$$

(1)- بين أن المعادلة : $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n في $\mathbb{R}^+$ و أن $0 < \alpha_n < 1$.

(2)- بين أن : $(\forall x \in]0,1[), f_{n+1}(x) < f_n(x)$ ، ثم إستنتج رتبة المتتالية $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

(3)- بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متقاربة و أعط تأطيرا لنهايتها .

(4)- أثبت بالخلف أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 1$.

• التمرين رقم 02: (04pts)

I- تتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}$.

(1)- بين أن f متصلة و تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}^+$.

(2)- حل في $\mathbb{R}^+$ المعادلة : $f(x) = x$ و أدرس إشارة $f(x) - x$.

(3)- حدد ما يلي : $f([0,1])$ و $f([1,2])$ و $f([2,+\infty[)$.

II- تتكن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = f(u_n) \text{ و } u_0 \in \mathbb{R}^+$$

(1)- حدد شرطاً كافياً و لازماً لكي تكون المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ثابتة .

(2)- نفترض أن $u_0 \in [0,1[$ ، بين أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة و أحسب نهايتها .

(3)- نفترض أن $u_0 \in]1,2[$ ، بين أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة و أحسب نهايتها .

(4)- نفترض أن $u_0 \in]2,+\infty[$ ، بين أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تزايدية قطعاً و أثبت أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

• التمرين رقم 03: (03pts)

تتكن الدالة f المعرفة على $I =]0,1[$ بما يلي : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos(\pi x)}}$

(1)- بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J ينبغي تحديده .

(2)- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f^{-1} على J ، ثم أحسب $(f^{-1})'(x)$ تكن $x \in J - \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$

(3)- بين أن المعادلة : $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $I =]0,1[$

(4)- تتكن المتتالية $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي : $S_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n^2} f^{-1}\left(\alpha + \frac{1}{n^2 + k}\right)$: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

أ- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), f^{-1}\left(\alpha + \frac{1}{n^2 + 1}\right) \leq S_n \leq f^{-1}\left(\alpha + \frac{1}{2n^2}\right)$

ب- إستنتج أن المتتالية $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متقاربة محدا نهايتها .

• التمرين رقم 04: (04pts)

ليكن $x \in \mathbb{R}^{*+} - \{1\}$

و تتكن المتتالية $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), a_n = \sqrt[n]{x}$

(1)- نفترض أن $x \in]0,1[$ ، بين أن المتتالية $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ تزايدية قطعاً و إستنتج أنها متقاربة .

(2)- نفترض أن $x \in]1, +\infty[$ ، بين أن المتتالية $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ تناقصية قطعاً و إستنتج أنها متقاربة .

(3)- بين أن تكن $n \in \mathbb{N}^* : (a_{n+1})^2 = a_n$ ، ثم أحسب نهاية المتتالية $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

⇨ نعتبر المتتاليتين $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ و $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المعرفتين بما يلي :

$(\forall n \in \mathbb{N}^*), c_n = 2^n \left(1 - \frac{1}{a_n}\right)$ و $(\forall n \in \mathbb{N}^*), b_n = 2^n (a_n - 1)$

(4)- بين أن المتتاليتين $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ و $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متحاديتان (غير مطلوب حساب نهايتهما المشتركة) .

(5)- تكن $n \in \mathbb{N}^*$ ، نضع : $d_n = \prod_{k=1}^n (\sqrt{a} - \sqrt[2k+1]{a})$ ، حيث a عدد حقيقي من المجال $]1,4[$

⇨ بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), 0 < d_n < (\sqrt{a} - 1)^n$ ، ثم إستنتج أن $(d_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متقاربة محدا نهايتها .

• التمرين رقم 05: (06pts)

I- نعتبر الدالة φ المعرفة على $[0, \pi]$ بما يلي : $\varphi(x) = \cos(x)$.

(1)- بين أن φ تقبل دالة عكسية φ^{-1} محددًا مجموعة تعريفها $D_{\varphi^{-1}}$.

(2)- بين أن φ^{-1} قابلة للاشتقاق على $] -1, 1[$ و أن : $(\forall x \in] -1, 1[, (\varphi^{-1})'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ بما يلي : $f(x) = \varphi^{-1}(\sin^2 x)$.

(1)- بين أن f قابلة للاشتقاق على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ و أن : $\left(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], f'(x) = \frac{-2\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\right)$.

(2)- بتطبيق مبرهنة التزايد المتناهية على f في المجال $\left[x, \frac{\pi}{2}\right]$ ، حيث $0 < x < \frac{\pi}{2}$ أثبت ما يلي :

$$\frac{-2}{\sqrt{1+\sin^2 x}} < \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} < \frac{-2\sin x}{\sqrt{2}}$$

(3)- استنتج أن f قابلة للاشتقاق على اليسار في $x_0 = \frac{\pi}{2}$ و اعط تأويلا للنتيجة المحصل عليها .

(4)- بين أن المعادلة : $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ و أن $\alpha = \varphi^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

(5)- تحقق أن : $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{3}$.

III- لتكن الدالة h المعرفة على $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ بما يلي : $h(x) = f \circ f(x)$.

(1)- بين أن : $h([0, \alpha]) \subset [0, \alpha]$ (تحديد صيغة $h(x)$ غير مطلوب) .

(2)- لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$$(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = h(u_n) \text{ و } u_0 = \frac{\pi}{4}$$

⇔ بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}), 0 < u_n < \alpha$ ، و أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تناقصية قطعاً .

(3)- بين أن : $(\forall x \in I), h(x) = \varphi^{-1}(1 - \sin^4 x)$.

(4)- بين أن لكل $x \in I$: $x \in \left\{0, \alpha, \frac{\pi}{2}\right\} \Leftrightarrow h(x) = x$.

(5)- بين أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها . (إنتهى الموضوع)

تمارين إضافية:

• التمرين رقم 01: (01pt)

تكن $n \in \mathbb{N}^*$ ، نضع : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k+1)}}$

أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متقاربة (حساب نهايتها غير مطلوب) .

• التمرين رقم 02: (01pt)

تتكن $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية مقاربة بحيث : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$ و $a_n \neq 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) .

أحسب النهاية : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(a_n + a_n^2 + a_n^3 + \dots + a_n^k) - k}{a_n - 1}$ ، حيث $k \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

• التمرين رقم 03: (01pt)

تكن $n \in \mathbb{N}^*$ ، نعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f_n(x) = \sqrt[2n]{\cos^{2n}(x) + \sin^{2n}(x)}$

حدد نهاية المتتالية $(f_n(a))_{n \in \mathbb{N}^*}$ تبعاً لقيم العدد الحقيقي a .

• التمرين رقم 04: (02pts)

ليكن $a \in \mathbb{R}^*$ و $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$(\forall n \in \mathbb{N}^*), x_{n+1} = x_n \left(1 + \frac{(-1)^n}{n(1+x_n^2)} \right)$ و $x_1 = a$

بين أن المتتالية $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $y_n = \frac{x_n}{n}$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) تؤول إلى 0 .

تخصص نقطة إضافية لحسن التنظيم و جودة التحرير و الدقة في الأجوبة .