

فرض منزلي رقم 2
الدورة الأولى

تمرين 1:

لتكن f دالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f'(\lambda x) = f(\lambda x)$ $\lambda \in \mathbb{R}$;
بين أن f قابلة للإشتقاق إلى الرتبة p على $\mathbb{R}$ ، و أن :

$$f^{(p)}(x) = \lambda^{\frac{p(p-1)}{2}} f(\lambda^p x)$$

تمرين 2:

لتكن f دالة قابلة للإشتقاق على مجال $[a; b]$.

x_1 و x_2 و x_3 أعداد حقيقية تحقق : $a \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq b$

و $\forall i \in \{1; 2; 3\}; f(x_i) = 0$ بين أن :

$$\forall x \in]a; b[; \exists c \in]a; b[/ f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \frac{f'''(x)}{3!}$$

تمرين 3:

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$g(x) = \sqrt[3]{x} - \sin(\sqrt[3]{x})$$

(1) بين أن :

$$\forall t \in \mathbb{R}^{++}; \exists c_t \in]0; t[/ t - \sin(t) = \frac{1}{3} t^3 \left(\frac{1 - \cos(\sqrt[3]{c_t})}{\sqrt[3]{c_t^2}} \right)$$

(2) استنتج حساب النهاية التالية :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - \sin(t)}{t^3}$$

مسألة:

A-1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $x + \sqrt{x^2 - 1} = 0$

(2) حل في $[1; +\infty[$ المعادلة : $x + \sqrt{x^2 - 1} = 2x$

B- لتكن : $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$

(1) حدد المجالات التي تقبل فيها الدالة f الإشتقاق .

(2) ادرس تغيرات f على هذه المجالات .

(3) ادرس الفروع اللانهائية ل (C_f) ثم أنشئ (C_f) .

(4) لتكن $g = f /]1; +\infty[$ ، بين أن g تقابل .

حدد صيغة $g^{-1}(x)$ ثم أنشئ $(C_{g^{-1}})$.

C- لتكن $h(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$

(1) بين أن : $\forall x > 0; \text{Arc tan}(x) + \text{Arc tan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

(2) لتكن $\Phi(x) = \text{Arc tan}(h(x))$

أ- بين أن : $(\forall x \in [1; +\infty[); \left(\Phi(x) - \Phi(-x) = \frac{\pi}{2} \right)$

ب- أحسب : $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \Phi(x)$

ج- كيف يستنتج $(C_f) /]-\infty; -1[$ من $(C_f) /]1; +\infty[$.

(3) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\Phi(x) - \Phi(1)}{x - 1}$ ، ماذا تستنتج ؟

يمكن وضع : $t = \Phi(x) - \Phi(1)$

و استعمال : $\sin(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 + \tan^2(\alpha)}$.

ب- استنتج $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{\Phi(x) - \Phi(-1)}{x + 1}$

ج- حدد المماسين للمنحنى (C_f) في النقطتين $A(1; \Phi(1))$

و $B(-1; \Phi(-1))$.

(4) أدرس تغيرات Φ ثم أنشئ (C_Φ) .

(5) لتكن $\psi = \Phi /]1; +\infty[$

بين أن ψ تقابل ، ثم أنشئ $(C_{\psi^{-1}})$.